Trois preuves du théorème de Darboux

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Trois preuves du théorème de Darboux***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I alors f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

Solution : ❶ **Première démontration :** *Soient $x < y$ dans I, et les applications $\varphi, \psi : [x, y] \to \mathbb{R}$ définies par*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} & \text{si } t \in]x, y] \\ f'(x) & \text{si } t = x, \end{cases} \qquad \psi(t) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(t)}{y-t} & \text{si } t \in [x, y[\\ f'(y) & \text{si } t = y, \end{cases}$$

vu les hypothèses sur f, φ et ψ sont continues sur $[x, y]$ et donc $I_\varphi := \varphi([x, y])$ et $I_\psi := \psi([x, y])$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Ils sont d'intersection non vide puisque $\varphi(y) = \psi(x)$, par conséquent $I_\varphi \cup I_\psi$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$ (la réunion de deux connexes non disjoints est toujours connexe). Ainsi, pour tout réel $\lambda \in (f'(x), f'(y))$ il existe $t \in]x, y[$ tel que $\varphi(t) = \lambda$ ou $\psi(t) = \lambda$, si par exemple $\varphi(t) = \lambda$ (idem avec ψ) le théorème des accroissements finis nous assure qu'il existe $\zeta_t \in]x, y[$ tel que

$$\lambda = \varphi(t) = \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = f'(\zeta_t).$$

finalement

$$\forall\, x, y \in I,\ \forall\, \lambda \in (f'(x), f'(y)) \quad \exists\, \zeta \in]x, y[:\ f'(\zeta) = \lambda$$

et f' possède bien la propriété des valeurs intermédiaires. CQFD

❷ **Seconde démontration :** ➪ *Supposons I sans borne supérieure (i.e. $I = [a, b[$ ou $]a, b[$). Considérons la partie connexe $\mathscr{C} = \{(x, y) \in I \times I\ :\ x \neq y\}$ l'application*

$$\varphi\ :\ (x, y) \in \mathscr{C} \mapsto \varphi(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

est visiblement continue, $\varphi(\mathscr{C})$ est donc connexe dans $\mathbb{R}$: c'est un intervalle, et par le théorème des accroissements finis $\varphi(\mathscr{C}) \subset f'(I)$. Inversement, vu la forme de I on a, pour tout $x \in I$

$$f'(x) = \lim_{y \to x,\, y > x} \varphi(x, y) \ \in\ \overline{\varphi(\mathscr{C})}$$

en resumé $\varphi(\mathscr{C})$ est connexe et

$$\varphi(\mathscr{C}) \subset f'(I) \subset \overline{\varphi(\mathscr{C})}$$

qui implique (cours sur les connexes) la connexité de $f'(I)$ qui assure notre résultat.

➪ *On procéde de même si $I =]a, b]$ et si $I = [a, b]$ on écrit $[a, b] =]a, b] \cup [a, b[$.*

❸ **Troisième démontration :** *soient*

$$a, b \in I,\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad f'(a) < \lambda < f'(b)$$

et

$$\varphi\ :\ x \in I \mapsto \varphi(x) = f(x) - \lambda x \in \mathbb{R}.$$

φ est dérivable sur I et il existe $\alpha, \beta \in]a, b[$ tels que $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$ (sinon φ est injective continue sur $]a, b[$ est strictement monotone, φ est dérivable : φ' est de signe constant ce qui est absurde puisque $\varphi'(a) = f'(a) - \lambda < 0$ et $\varphi'(b) = f'(b) - \lambda > 0$...) on conclut alors avec le théorème de Rolle. ❑

Références