# Comportement asymptotique du « point intermédiaire » dans la formule de Taylor-Lagrange

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Comportement asymptotique du « point intermédiaire » dans la formule de Taylor-Lagrange***

*[1]*

*Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une application* $n$ *fois dérivable. Fixons* $x \in \mathbb{R}$*, alors pour* $h > 0$ *la formule de Taylor-Lagrange assure de l'existence d'un réel* $\theta(h)$ *tel que*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h).$$

*Si de plus* $f^{(n+1)}(x)$ *existe et est différent de zéro,montrer que*

$$\lim_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}.$$

***Solution :*** *Par Taylor-Young*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1})$$

*et par Taylor-Lagrange*

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h)$$

*soit*

$$\frac{f^{(n)}(x + \theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{h} = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}$$

*et*

$$\theta(h) = \frac{\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} + \frac{o(h)}{h}}{\frac{f^{(n)}(x+\theta(h)h) - f^{(n)}(x)}{\theta(h)h}}$$

*puisque* $f^{(n+1)}(x) \neq 0$ *on peut passer à la limite dans cette dernière égalité et le résultat suit.* ❏

## Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathe- matical Library. AMS, 2001.