

Une inéquation fonctionnelle

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Une inéquation fonctionnelle

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{Q} : |f(x) - f(q)| \leq |x - q|^2.$$

Solution : Soit f une solution éventuelle. Pour $a < b$ deux rationnels, $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ posons $a_i = a + i \frac{b-a}{n}$. Il est clair que les réels a_i sont rationnels et l'inégalité triangulaire nous donne

$$|f(a) - f(b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| \leq 7 \sum_{i=0}^{n-1} |a_i - a_{i-1}|^2 = 7 \frac{(b-a)^2}{n}.$$

En faisant tendre maintenant n vers $+\infty$ on en déduit que $f(a) = f(b)$: f est donc constante sur $\mathbb{Q}$.

Montrons que f est constante sur $\mathbb{R}$: On a déjà $f(q) = r$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$; pour $x \in \mathbb{R}$ considérons une suite de rationnels $(q_n)_n$ qui converge vers x , alors

$$|f(x) - r| = |f(x) - f(q_n)| \leq 7|x - q_n|^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

i.e. $f(x) = r$: f est bien constante. Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont solutions du problème.

Références