L'équation fonctionnelle $f^2(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt + 2007.$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'équation fonctionnelle*** $f^2(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt + 2007$***.***

[1]

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *vérifiant*

$$f^2(x) = \int_0^x \left(f^2(t) + f'^2(t)\right) dt + 2007, \quad x \in \mathbb{R}.(\star)$$

Solution : *Les deux fonctions de part et d'autre de l'égalité* $(\star)$ *seront égales si elles ont même dérivée et coïncident à l'origine. Dérivons* $(\star)$*, on tombe sur*

$$2f(x)f'(x) = f^2(x) + f'^2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou encore $(f - f')^2(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$*, soit* $f = f'$ *et finalement* $f(x) = Ce^x,\ x \in \mathbb{R}$*. Enfin l'évaluation à l'origine donne* $f^2(0) = 2007$ *; les solutions de l'équation fonctionnelle* $(\star)$ *sont les deux fonctions* $f(x) = \pm\sqrt{2007}e^x$*.*

Références

[1] K.S.Kedlaya, B.Poonen, and R.Vakil. The William Lowell Putnam competition 1985-2000. MAA Problem Books. M.A.A., 2002.