Des petits « o »

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Des petits « o »***

[1]

Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$. *Si*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \quad et \quad f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = o(x),\ (x \to 0),$$

montrer que $\quad f(x) = o(x),\ (x \to 0)$.

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$, *vu la seconde hypothèse, il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{f(x) - f(x/2)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}.(\star)$$

Fixons nous $y \in]0, \delta[$, *comme on peut écrire pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$

$$f(y) = (f(y) - f(y/2)) + (f(y/2) - f(y/4)) + \cdots + \big(f(y/2^{n-1}) - f(y/2^n)\big) + f(y/2^n),$$

on en déduit avec $(\star)$

$$\begin{aligned}|f(y)| &\leq \sum_{j=1}^{n} |f(y/2^{j-1}) - f(y/2^j)| + |f(y/2^n)| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \frac{y}{2^j}\varepsilon + |f(y/2^n)| \\ &\leq \varepsilon y(1 - 2^{-n}) + |f(y/2^n)| \\ &\leq \varepsilon y + |f(y/2^n)|\end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$. *De là, comme* $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, *en faisant tendre* n *vers l'infini il reste*

$$|f(y)| \leq \varepsilon y.$$

Résumons nous : pour tout $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $0 < y < \delta$ *tel que* $|f(y)/y| \leq \varepsilon$ *; autrement dit* $f(x) = o(x)$ *CQFD.*

Références

[1] A.M. Gleason, R.E. Greenwood, and L.M. Kelly. The William Lowell Putnam Mathematical Competition Problems and Solutions 1938-1964. MAA Problems Books. M.A.A., 1980.