Continuité ordinaire et continuité au sens de Cesàro

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Continuité ordinaire et continuité au sens de Cesàro***

On dira qu'une suite $(x_n)_n$ de nombres réels converge vers $x \in \mathbb{R}$ au sens de Césaro si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = x$$

et on écrira $x_n \to x$ (C). Il est bien connu que la convergence usuelle implique la convergence au sens de Cesàro et que la réciproque esr fausse. On dira qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue au sens de Cesàro au point x, si $x_n \to x$ (C) implique $f(x_n) \to f(x)$ (C).

1. *Etudier la continuité au sens de Cesàro des applications $f(x) = ax+b,\ g(x) = \sqrt{x},\ h(x) = x^2$ sur leur domaine de définition*
2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue au sens de Cesàro en un point $x_0 \in \mathbb{R}$.*
   - *Montrer qu'on peut toujours supposer que $x_0 = 0$ et $f(x_0) = 0$.*
   - *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $a,\ b,\ -(a+b),\ a,\ b,\ -(a+b), a,\ b,\ -(a+b),\ \ldots$ converge au sens de Cesàro vers 0. En déduire que $f(a+b) = f(a) + f(b)$.*
   - *Montrer que $f(qx) = qf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Q}$.*
   - *Soit $(x_n)_n$ une suite convergente vers 0. Montrer qu'il existe une suite de réels $(y_n)_n$ telle que $x_n = n^{-1}(y_1 + \cdots + y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.*
   - *Montrer que f est continue à l'origine.*
   - *En déduire que f est de la forme $f(x) = ax + b$.*

Solution :

1.
2. *Soit f une fonction continue au sens de Cesàro au point x_0.*
   - *Quitte à considérer $g = f - f(x_0)$ on peut supposer que $f(x_0) = 0$ et quitte à remplacer $g(x)$ par $h(x) = g(x + x_0)$ on peut supposer que $x_0 = 0$. Nous considérerons donc dans la suite une application f continue au sens de Cesàro à l'origine et vérifiant $f(0) = 0$.*
   - *Soient a, b deux réels quelconques, de manière évidente, la suite*

$$a,\ b,\ -(a+b),\ a,\ b,\ -(a+b), a,\ b,\ -(a+b,\ \ldots$$

converge au sens de Cesàro vers 0. f *étant par hypothèse continue au sens de Cesàro à l'origine, il en est donc de même pour la suite*

$$f(a),\ f(b),\ f(-(a+b)),\ f(a),\ f(b),\ f(-(a+b)),\dots$$

Mais cette derière converge au sens de Cesàro vers $f(a)+f(b)+f(-(a+b))$. *Nous avons donc* $f(0)=0=f(a)+f(b)+f(-(a+b))$, *soit*

$$f(a)+f(b)=-f(-(a+b)),\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

En choisissant $b=0$ *il vient*

$$f(a)=-f(-a),\quad \forall\, a\in\mathbb{R},$$

qui nous donne finalement

$$f(a)+f(b)=f(a+b),\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}.$$

Nous venons donc de démontrer que toute fonction continue au sens de Cesàro en au moins un point vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy : $f(a)+f(b)=f(a+b),\quad \forall\, a,b\in\mathbb{R}$, *une équation que nous avons étudiée dans un autre exercice (voir ....). Nous savons en particulier que* f *sera de la forme* $f(x)=ax+b$ *dès qu'elle sera continue en au moins un point ; mais ici c'est au sens de Cesàro que* f *est continue et il n'est donc pour le moment pas possible de conclure... Les deux prochaines questions vont justement établir l'hypothèses manquante à savoir la continuité de* f *à l'origine.*

- *L'existence de la suite* $(y_n)_n$ *revient à résoudre les équations*

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=nx_n,\quad \forall\, n\in\mathbb{N}^\star.$$

Soit

$$y_n=nx_n-(n-1)x_{n-1},\quad n\in\mathbb{N}^\star$$

(avec la convention $x_0=0$*).*

- *Comme*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n=0$$

on à $y_n\to 0\ (C)$ *et* f *étant continue au sens de Cesàro en* 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=0.$$

Comme f *satisfait l'équation fonctionelle de Cauchy*

$$f(x_n)=f\left(\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}\right)=\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}$$

et finalement

$$\lim_n f(x_n)=\lim_n\frac{f(y_1)+f(y_2)+\cdots+f(y_n)}{n}=0,$$

f est donc continue à l'origine.

- Il est maintenant facile de conclure : f est continue à l'origine et vérifie l'équation fonctionelle de Cauchy : elle est donc de la forme $f(x) = ax + b$.

La continuité au sens de Cesàro est donc une propriété beaucoup plus contraignante que la continuité usuelle ; ce résultat n'était à priori, absolument pas prévisible. En effet, les relations éventuelles entre continuité ordinaire et continuité au sens de Cesàro ne sont pas évidentes : il y a plus de suites (C)-convergentes, mais d'un autre coté, la (C)-convergence est plus faible que la convergence usuelle ; autrement dit, une fonction continue au sens de Cesàro doit sur beaucoup plus de suites faire quelque chose moins fort que la continuité ordinaire.

Références