Une application discontinue sur $\mathbb{Q}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une application discontinue sur*** $\mathbb{Q}$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^\star,\ pgcd(p,q) = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^\star$*, discontinue sur* $\mathbb{Q}^\star$.

Solution :

1. *Soit* $x \in \mathbb{Q}^\star$*, il existe* $q \in \mathbb{N}^\star$ *tel que* $f(x) = \frac{1}{q} > 0$ *mais aussi une suite* $(x_n)_n$ *d'irrationels de limite* x *soit*

$$\lim_n f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{q} = f(x)$$

   f *est donc bien discontinue sur* $\mathbb{Q}^\star$.

2. *Soient maintenant* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ *et* $q_0 \in \mathbb{N}^\star$ *vérifiant* $\frac{1}{q_0} < \varepsilon$*. L'ensemble des rationnels* $\frac{p}{q}$ *avec* $q \leq q_0$ *tels que* $|x - \frac{p}{q}| < 1$ *est fini (la distance entre deux tels éléments est au moins* $\geq \frac{1}{q_0}$*...) il existe donc* $\delta > 0$ *tel que* $]x - \delta, x + \delta[$ *ne possède que des rationnels à dénominateur* $> q_0$ *et*

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq |f(y)| \leq \varepsilon.$$

Remarques : *La seconde étape résulte aussi (très bon exercice sur les suites et sous-suites) du fait suivant (en fait le même) : « si une suite de rationnels* $(p_n/q_n)_n$ *converge vers un irrationnel alors* $\lim_n q_n = +\infty$ *».*

Références