Propriétés topologiques de l'ensemble des points de discontinuité d'une application

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Propriétés topologiques de l'ensemble des points de discontinuité d'une application***

[1]

Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques.

1. *Soient $\emptyset \neq A \subset X$ et $f : A \to Y$. Pour $x \in \overline{A}$ on pose*

$$o_f(x, \delta) := \mathrm{diam(f(A \cap B(x, \delta)))}, \quad \delta \in \mathbb{R}_+^\star.$$

   L'oscillation de f au point x est définie par

$$o_f(x) = \lim_{\delta \to 0_+} o_f(x, \delta).$$

   Montrer que f est continue en $a \in A$ si et seulement si $o_f(a) = 0$. Montrer enfin que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{ x \in \overline{A} : o_f(x) \geq \varepsilon\}$ est fermé dans X.

2. *Montrer que l'ensemble des points de continuité d'une application $f : X \to Y$ est un G_δ (i.e. une intersection dénombrable d'ouverts). Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est un F_σ (i.e. une réunion dénombrable de fermés).*
3. *Montrer que tout F_σ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des points de discontinuité d'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*
4. *Soit A un F_σ d'un espace métrique X. Existe-t-il une application $f : X \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité soit précisément A ?*
5. *Soient X un espace métrique complet et $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que si f est limite simple sur X d'une suite de fonctions continues alors l'ensemble des points de discontinuité de f est maigre dans X (i.e. réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide) ; en déduire que l'ensemble des points de contuité de f est dense dans X.*
6. *Existe-t-il une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des points de discontinuité soit exactement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?*

Solution :

1. *Supposons f continue au point $a \in A$: pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) \in B_{\delta_2}(f(a), \varepsilon/2)$ pour tout $x \in B_{\delta_1}(a, \delta) \cap A$. Par conséquent $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $x, y \in B_{\delta_1}(a, \delta) \cap A$ soit $o_f(a) = 0$.*

   Réciproquement si $o_f(a) = 0$, alors étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ implique $\mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a, \delta))} < \varepsilon$ i.e. $d_1(x, a) < \delta$ implique $d_2(f(a), f(x)) \leq \mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a, \delta))} < \varepsilon$.

   Soient $B = \{ x \in \overline{A} \ : \ o_f(x) \geq \varepsilon\}$ et une suite $(x_n)_n \subset B$ convergente dans X vers un point adhérent $a \in \overline{B}$. Puisque $B \subset \overline{A}$ nécéssairement $a \in \overline{A}$ et $o_f(x)$ est donc bien défini. En outre, pour tout $\delta > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B_{\delta_1}(x_n, \delta/2) \subset B_{\delta_1}(a, \delta)$ et par conséquent

   $$\mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(a, \delta))} \geq \mathrm{diamf(A \cap B_{\delta_1}(x_n, \delta/2))} \geq \mathrm{o_f(x_n)} \geq \varepsilon$$

   soit $o_f(a) \geq \varepsilon$ i.e. $a \in B$; $\{ x \in \overline{A} \ : \ o_f(x) \geq \varepsilon\}$ est fermé dans (X, δ_1).

2. *L'ensemble C des points de continuité de f est donc l'ensemble $\{ x \in X \ : \ o_f(x) = 0\}$ soit*

   $$C = \bigcap_{n \geq 1} \{ x \in X \ : \ o_f(x) < \frac{1}{n}\},$$

   intersection dénombrable d'ouverts d'après la question précédente : C est bien un G_δ et par passage au complémentaire, l'ensemble $X \setminus C$ des points de discontinuité de f est bien un F_σ.

3. *Soit $A = \cup_{n \geq 1} F_n$ un F_σ. Quitte à remplacer F_n par $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ on peut supposer que la suite de fermés $(F_n)_n$ est une suite croissante pour l'inclusion. Si $A = \mathbb{R}$ la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$, $x \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$ qui est discontinue sur tout $\mathbb{R}$ convient. Si $A \neq \mathbb{R}$, considérons la fonction*

   $$g_A(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \in K_x := \{k \in \mathbb{N} \ : \ x \in F_k\}} 2^{-n} & si \quad x \in A, \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

   et posons alors

   $$f_A(x) = g_A(x) \left(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) - \frac{1}{2} \right).$$

   g_A et donc f_A est bien définie sur $\mathbb{R}$; nous allons vérifier que l'ensemble des points de discontinuité de f_A est précisément A.

   - Soit $x \in \mathring{A}$, on peut alors construire deux suites $(x_n)_n \in \mathring{\overline{A}} \cap \mathbb{Q}$, $(y_n)_n \in \mathring{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ toutes deux convergentes vers x. Vu sa définition, $g_A(x) > 0$ si $x \in A$, et vu celle de f_A : $f_A(x_n) > 0$, $f_A(y_n) < 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ si bien que f_A continue au point x implique $f_A(x) = 0$ ce qui est absurde puisque $x \in A$: f_A est donc discontinue sur l'intérieur de A.

   On procède identiquement si $x \in A \cap \partial A$: $f_A(x) \neq 0$ mais on peut approcher x par une suite $(z_n)_n \subset \mathbb{R} \setminus A$ soit $f_A(z_n) = 0$ d'où la discontinuité.

   $A = \mathring{A} \cup (\partial A \cap A)$ la fonction f_A est bien discontinue sur A.

   - Sur $\mathbb{R} \setminus A$: $f_A \equiv 0$. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite convergente vers $x \in \mathbb{R} \setminus A$, si $(x_k)_k \subset A$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un entier k_n tel que $k \geq k_n \implies x_k \notin F_n$ (en effet, sinon, il

existerai une infinité de x_k dans au moins un F_n soit $x \in \overline{F}_n = F_n \subset A$!). Ainsi :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists k_n \in \mathbb{N}\ :\ k \geq k_n \quad \Longrightarrow \quad g_A(x_k) \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots = \frac{1}{2^n}$$

qui assure que $\lim_{k\to+\infty} g_A(x_k) = 0 = g_A(x)$ *:* g_A *est bien continue au point* x *et donc sur* $\mathbb{R} \setminus A$.

4. *Non, par exemple toute fonction définie sur un espace métrique discret est continue.*
5. *On considère une suite* $(f_n)_n$ *d'applications continues sur* X *et simplement convergente sur* X *vers* f. *Posons pour* $m \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0$

$$A_\varepsilon(m) = \{x \in X\ :\ |f(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\}, \quad A(\varepsilon) = \bigcup_{m\geq 1} \overset{\circ}{A_\varepsilon}(m).$$

Nous allons vérifier que $C := \cap_{n\geq 1} A_{1/n}$ *est l'ensemble des points de discontinuité de* f *:*

Supposons pour commencer que f *soit continue en un point* $x \in X$. *Puisque* $f(x) = \lim_n f_n(x)$, *il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par continuité de f *et* f_m *en* x *il existe une boule* $B(x, r)$ *telle que*

$$\forall\, y \in B(x,r) \quad : \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_m(y) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En regroupant ces trois inégalités il vient

$$|f(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in B(x,r),$$

autrement dit, on a l'inclusion $(A_\varepsilon(m))^\circ \subset A_\varepsilon$ *;* ε *etant arbitraire :* $x \in C$.

Réciproquement, soit $x \in C = \cap_{n\geq 1} A_{1/n}$ *; pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* m *tel que* $x \in C := \cap_{m\geq 1}(A_m(\varepsilon/3))^\circ$. *il existe donc une boule* $B(x, r)$ *telle que*

$$|f(y) - f_m(y)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, y \in B(x,r),$$

avec l'inégalité triangulaire et la continuité de f_m, *on déduit facilement la continuité de* f *au point* x.

- *Il nous reste à montrer que* $X \setminus C$ *est maigre. Pour cela considérons pour* $m \in \mathbb{N}$

$$F_m(\varepsilon) = \{x \in X\ :\ |f_n(x) - f_{m+k}(x)| \leq \varepsilon\}.$$

Les applications f_n *étant continues,* $F_m(\varepsilon)$ *est fermé ; et par convergence simple vers* f *sur* X *nous avons*

$$X = \cup_{m\geq 1} F_m(\varepsilon) \quad \text{et} \quad F_m(\varepsilon) \subset A_m(\varepsilon).$$

par conséquent

$$\bigcup_{m\geq 1} (F_m(\varepsilon))^\circ \subset A_\varepsilon.$$

Alors $X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(\varepsilon))^\circ$ est maigre : en effet, visiblement fermé ; il est aussi d'intérieur vide, ceci résulte du fait que pour tout $F \subset X$ l'ensemble $F \setminus \mathring{F}$ est d'intérieur vide et de l'inclusion

$$X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(\varepsilon))^\circ \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m(\varepsilon) \setminus (F_m(\varepsilon))^\circ.$$

Maintenant, il faut remarquer que comme $X \setminus A_\varepsilon \subset X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(\varepsilon))^\circ$, l'ensemble $X \setminus A_\varepsilon$ est aussi de première catégorie (maigre). Il reste enfin (! !) à remarquer l'inclusion

$$X \setminus C = X \setminus \bigcap_{n\geq 1} A(1/n) = \bigcup_{n\geq 1}(X \setminus A_{1/n})$$

qui nous permet d'affirmer que $X \setminus C$ est aussi maigre.

Avec les notations de la question précédente nous avons

$$X \setminus A(1/k) \subset X \setminus \bigcup_{m\geq 1}(F_m(1/k))^\circ \subset \bigcup_{m\geq 1} F_m(1/k) \setminus (F_m(1/k))^\circ$$

si bien que

$$\bigcup_{k\geq 1} X \setminus A(1/k) \subset \bigcup_{k\geq 1}\bigcup_{m\geq 1} F_m(1/k) \setminus (F_m(1/k))^\circ.$$

$X \setminus C$ est inclu dans une réunion dénombrable d'ensembles maigre : C contient donc une intersection d'ouverts denses, par le théorème de Baire, C est dense dans X.

6. Si une telle fonction existe, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ serait un F_σ d'intérieur vide, donc maigre et par suite $\mathbb{R} = (\mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ est lui aussi maigre comme réunion de deux ensembles maigres ce qui est absurde au vu du théorème de Baire.

   Remarque : Il n'y a par contre aucune obstruction à l'existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble de discontinuité est $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ étant un F_σ un tel objet est construit dans la question

7. et on trouvera dans l'exercice ci-dessous un autre exemple beaucoup plus classique.

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Integration, volume 3 of Student Mathematical Library. AMS, 2003.