Théorème du point fixe : quelques limites

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 mai 2023

Exercice 0.1 ★ ***Théorème du point fixe : quelques limites***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

montrer que f réduit strictement les distances et toutefois ne possède aucun point fixe.

Solution : *On vérifie facilement que f est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 0$, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et un calcul élémentaire montre $f'(x) \in [0, 1[$. Avec le théorème des valeurs intermédiaires, si $x \neq y$ il existe $c \in (x, y)$ tel que*

$$|f(x) - f(y)| = |f'c)| \cdot |x - y| < |x - y|$$

f réduit donc strictement les distances, mais bien entendu, l'équation $f(x) = x$ est sans solution.

Remarque : *le théorème du point fixe ne s'applique pas ici, en effet, f n'est pas contractante (i.e. $\exists 0 < k < 1 \ : \ \forall x \neq y \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$) elle l'est localement mais pas globalement (car $f'(x) \to 1_-$ lorsque $x \to +\infty$).*

Références