Continuité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Continuité***

Existe-t-il une application continue f de $\mathbb{C}^\star$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant

$$\exp(f(z)) = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}^\star \qquad ?$$

Solution : *Supposons qu'une telle fonction existe. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\exp(f(e^{ix})) = e^{ix} \quad \Longrightarrow \quad g(x) = \exp(f(e^{ix}) - ix) \equiv 1,$$

mais vu les hypothèses sur f et les propriétés de l'exponentielle complexe

$$g(\mathbb{R}) \subset 2i\pi\mathbb{Z},$$

la partie connexe $g(\mathbb{R})$ (g est continue) est inclue dans l'ensemble discret $2i\pi\mathbb{Z}$: g est donc constante

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ :\ g \equiv 2iN\pi$$

et par suite l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$h(x) := f(e^{ix}) = ix + 2iN\pi$$

est clairement non bornée. Mais tout ceci est absurde puisque

$$h(\mathbb{R}) = f(\mathbb{U}) := \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| = 1\}$$

est compact (et donc borné) comme image continue d'un compact. Contradiction.

Remarque :

le logarithme népérien $\log\ :\ \mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$ n'admet aucun prolongement continu à $\mathbb{C}^\star$. On sait toutefois qu'en ôtant à $\mathbb{C}$ une demi-droite issue de l'origine un tel prolongement existe (et même une infinité)

Références