

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

30 juin 2022

## Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et le point  $A \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{vmatrix}$ . On considère les quatre plans d'équations :

$$P_1 : x + y - 1 = 0, P_2 : y + z - 1 = 0, P_3 : x + z - 1 = 0, P_4 : x - y + z = 0$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur  $a$  pour que les projections orthogonales de  $A$  sur les quatre plans soient 4 points coplanaires.

**Solution :** Un vecteur normal au plan  $(P_1)$  est  $\vec{n}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ . En notant  $A_1 \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$  le projeté orthogonal de

$A$  sur le plan  $P_1$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A_1 = A + \lambda \vec{n}$  :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = a \end{cases}$$

Comme  $A_1 \in P_1$ , on a  $(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0$  d'où l'on tire  $\lambda = -1/2$  et  $A_1 \begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{vmatrix}$ . Par

la même méthode, on trouve  $A_2 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 - a/2 \\ a/2 \end{vmatrix}$ ,  $A_3 \begin{vmatrix} 1 - a/2 \\ 1 \\ a/2 \end{vmatrix}$  et  $A_4 \begin{vmatrix} 1 - a/3 \\ 1 + a/3 \\ 2a/3 \end{vmatrix}$ . Les quatre points sont

coplanaires si et seulement si  $\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = 0$ , ou encore (pour simplifier les calculs),  $\det(2\overrightarrow{A_1A_2}, 2\overrightarrow{A_1A_3}, 6\overrightarrow{A_1A_4}) = 0$ . En développant, on trouve que  $2a(a + 1) = 0$ , c'est-à-dire  $a = 0$  ou  $a = -1$ .

**Références**