Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

14 octobre 2022

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et le point $A\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{vmatrix}$. On considère les quatre plans d'équations :

$$P_1 \; : x + y - 1 = 0, \; P_2 : \; y + z - 1 = 0, \; P_3 : \; x + z - 1 = 0, \; P_4 : \; x - y + z = 0$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les projections orthogonales de A sur les quatre plans soient 4 points coplanaires.

Solution : *Un vecteur normal au plan (P_1) est $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$. En notant $A_1\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ le projeté orthogonal de A sur le plan P_1, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_1 = A + \lambda \overrightarrow{n}$:*

$$\begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= a \end{cases}$$

Comme $A_1 \in P_1$, on a $(1 + \lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0$ d'où l'on tire $\lambda = -1/2$ et $A_1\begin{vmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{vmatrix}$. Par la même méthode, on trouve $A_2\begin{vmatrix} 1 \\ 1 - a/2 \\ a/2 \end{vmatrix}$, $A_3\begin{vmatrix} 1 - a/2 \\ 1 \\ a/2 \end{vmatrix}$ et $A_4\begin{vmatrix} 1 - a/3 \\ 1 + a/3 \\ 2a/3 \end{vmatrix}$. Les quatre points sont coplanaires si et seulement si $\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}) = 0$, ou encore (pour simplifier les calculs), $\det(2\overrightarrow{A_1A_2}, 2\overrightarrow{A_1A_3}, 6\overrightarrow{A_1A_4}) = 0$. En développant, on trouve que $2a(a + 1) = 0$, c'est-à-dire $\boxed{a = 0 ou a = -1}$.

Références