Sur la continuité de l'application réciproque, suite

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur la continuité de l'application réciproque, suite***

Soit f une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que f est une bijection continue dont l'application réciproque f^{-1} est partout discontinue.

Solution : *$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ étant tous deux dénombrables, une telle bijection existe. Soit $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $\varepsilon > 0$ si $0 < \eta < 1$: $(z \in \mathbb{Z}\ \&\ |z - a| < \eta) \Longrightarrow z = a$ et par suite $|f(z) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. f est donc continue sur $\mathbb{Z}$.*

Par contre si $b \in \mathbb{Q}$ et $0 < \varepsilon < 1$ il existe pour tout $\eta > 0$ un rationnnel $c \in \mathbb{Q} \bigcap (]a - \eta, a + \eta[\setminus\{a\})$. alors f^{-1} étant injective $|f^{-1}(a) - f^{-1}(c)| \geq 1 > \varepsilon$, i.e. f^{-1} est discontinue au point a.

Remarque : *C'est cette fois-ci la non-connexité de l'intervalle de départ (ici $\mathbb{Z}$) qui rend possible la non-continuité de l'application réciproque.*

Références