Sur la continuité de l'application réciproque

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur la continuité de l'application réciproque***

Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\forall n \geq 1\ :\ f(2n) = n,\ f(2n+1) = \frac{1}{2n+1},\ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2(n-1)}\,(n \neq 1),$$

et $f(x) = x$ *pour tout autre réel positif ; on prolonge enfin* f *sur* $\mathbb{R}$ *par imparité. Montrer que* f *est bijective, continue à l'origine avec* f^{-1} *discontinue en* $x = 0$.

Solution : *Que* f *soit bijective, c'est clair, on a tout fait pour.* f *est aussi continue à l'origine car*

$$f(0) = 0 \quad \& \quad |f(x)| \leq |x|.$$

Enfin, puisque

$$f^{-1}(\frac{1}{2n+1}) = 2n+1,$$

f^{-1} *est bien discontinue à l'origine.*

Remarques : *- Cet exemple est un garde-fou contre la tentation d'affirmer que l'application réciproque d'une application continue en un point est continue en l'image de ce point : le théorème standart du cours impose à* f *d'être* ***bijective et continue*** *sur* ***tout*** *un intervalle ouvert* I *pour pouvoir affirmer que* f^{-1} *sera continue sur* $f(I)$*. En outre la construction est facile à mémoriser : pour que* f^{-1} *soit discontinue à l'origine il suffit de construire une suite ne tendant pas vers zéro telle que son image par* f *tende vers zéro ; ayant envoyé tous les nombres pairs sur les entiers nous pouvons faire ce que nous voulons des impairs qui sera notre suite, reste plus qu'à bricoler un peu pour conserver la bijectivité...*

- Quitte à modifier légérement f *(considérer* f^3 *à la place de* f*), on peut même produire un exemple où* f *est dérivable à l'origine (*f^3 *est dérivable en* $x = 0$ *car* $|f(x)| \leq |x| \Longrightarrow f^3(x) = o(x^2)$ *à l'origine).*

Références