Sur les points de discontinuité d'une bijection $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur les points de discontinuité d'une bijection*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$

Montrer qu'une bijection entre $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}_+^\star$ *possède au moins un ensemble dénombrable de points de discontinuité.*

Solution :

1. *Il faut commencer par remarquer que* f *n'est pas continue sur* $\mathbb{R}$. *En effet,* f *continue et bijective sur* $\mathbb{R}$ *sera strictement monotone, par exemple strictement croissante ; dans ce cas en considérant* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tel que* $f(x_0) = 0$ *on aurait* $f(x) > 0$ *pour* $x > x_0$ *et* $f(x) < 0$ *pour* $x < 0$ *ce qui est bien sûr absurde puisque* $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+^\star$. f *n'est donc pas continue sur* $\mathbb{R}$.
2. *Supposons maintenant que* f *ne possède qu'un nombre fini de points de discontinuité* $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. f *est alors strictement monotone sur chaque intervalle* $]-\infty, x_1[,]x_1, x_2[, \dots,]x_n, +\infty[$ *et par le théorème des valeurs intermédiaires* $f(]-\infty, x_1[), f(]x_1, x_2[), \dots, f(]x_n, +\infty[)$ *sont des intervalles ouverts deux à deux disjoints, donc*
$$\mathbb{R}_+^\star \setminus \left(f(]-\infty, x_1[) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} f(]x_i, x_{i+1}[) \cup f(]x_n, +\infty[) \right)$$
possède au moins $n+1$ *éléments mais de l'autre côté*
$$\mathbb{R} \setminus \left( ]-\infty, x_1[\cup \bigcup_{i=1}^{n-1}]x_i, x_{i+1}[\cup]x_n, +\infty[\right) = \{x_1, \dots, x_n\}$$
f *ne peut donc être bijective.*

Références