Le théorème des valeurs intermédiaires

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Le théorème des valeurs intermédiaires***

[1]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application possédant la propriété des valeurs intermédiaires et telle que $\forall\, q \in \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{q\})$ est fermé, montrer que f est continue.

Solution : *Supposons que f soit discontinue en un point $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite $(x_n)_n$ convergente vers x telle que $(f(x_n))_n$ ne converge pas vers $f(x)$. Il existe donc $\varepsilon > 0$, une suite d'entiers $n_k > k$ vérifiant*

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout entier k on a $f(x_{n_k}) \geq f(x) + \varepsilon > f(x)$ ou bien $f(x_{n_k}) \leq f(x) + \varepsilon < f(x)$. L'une au moins de ces deux inégalités est réalisée pour une infinité de k, sans perdre de généralité et quitte à extraire une sous-suite supposons que la première soit vérifiée pour tout k. Considérons alors $q \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x)+\varepsilon > q > f(x)$. Nous avons alors $f(x_{n_k}) > q > f(x)$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ et f vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, il existe pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y_k \in (x, x_{n_k})$ tel que $f(y_k) = q$, ce qui ne veut rien dire d'autre que la suite $(y_k)_k$ convergente vers x est incluse dans $f^{-1}(\{q\})$ fermé de $\mathbb{R}$: $x \in f^{-1}(\{q\})$ i.e. $f(x) = q$ ce qui est bien entendu absurde.

Remarques : *- Une fonction continue sur un intervalle vérifie toujours la propriété des valeurs intermédiaires. La réciproque bien entendu est incorrecte, pour en fournir un exemple simple il suffit de se souvenir (voir un autre exercice) du théorème de Darboux qui dit qu'une fonction dérivée vérifie toujours le théorème des valeurs intermédiaires et de construire une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée non continue, l'exemple standart étant*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \in \mathbb{R}^\star \\ 0 & si\ x = 0. \end{cases}$$

*-On peut aussi contruire ([**?**],pages 79-80) une fonction nulle part continue mais vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires sur tout intervalle de $\mathbb{R}$, un exemple toutefois bien délicat et fortement déconseillé pour l'oral...*

-pour en savoir plus la lecture de l'article de J.B. Hiriart-Urruty « Que manque-t-il à une fonction vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires pour être continue ? » *([**?**], ref. exacte ? ?) est fortement conseillée.*

Références

[1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathe- matical Library. AMS, 2001.