

Autour des valeurs intermédiaires

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Autour des valeurs intermédiaires

[1]

Existe-t-il une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prenant exactement deux fois chaque valeur ?

Solution : Supposons qu'une telle fonction existe et soient $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = b$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$, $f(x) \neq b$ et par suite on a ou bien $f(x) > b$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$ ou bien $f(x) < b$ pour tout $x \in]x_1, x_2[$. Dans le premier cas, il existe un unique $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que $c = f(x_0) = \max\{f(x), x \in [x_1, x_2]\}$. En effet, sinon f va prendre sur $[x_1, x_2]$ au moins trois fois certaines valeurs (faire un dessin si le max est atteint en deux points distincts, c'est le TVI). Ainsi il doit exister exactement un réel x'_0 en dehors de $[x_1, x_2]$ tel que $f(x'_0) = f(x_0) = c > b$. Mais alors, toujours par le théorème des valeurs intermédiaires tous les réels de $]b, c[$ seront atteints au moins trois fois. Contradiction. On procède de manière analogue si $f < b$ sur $]x_1, x_2[$.

Remarques : -Voir aussi [?], pages 87-90.

- Il existe par contre des fonctions prenant exactement trois fois chaque valeurs, il suffit par exemple si

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } -3 \leq x \leq -1 \\ -x & \text{si } -1 < x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

de considérer la fonction f définie par

$$f(x) = g(x - 6n) + 2n \text{ si } 6n - 3 \leq x \leq 6n + 3$$

Pour vous en convaincre représentez graphiquement f , vous observez une sorte de dent de scie inclinée qui semble visiblement répondre au problème...

Références

- [1] W.J. Kaczor and M.T. Nowak. Problems in Mathematical Analysis : Sequences and Series, volume 1 of Student Mathematical Library. AMS, 2001.