Continuité et composition

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Continuité et composition***

[1], 19 ? ?

Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et deux fonctions

$$g : I \longrightarrow J \quad \& \quad f : J \longrightarrow \mathbb{R}$$

on suppose g continue sur I et $f \circ g$ continue sur I ; montrer que f est continue sur $g(I)$.

Solution : *Soit donc $y \in g(I)$, et supposons f discontinue en y : il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(y_n)_n \subset g(I)$ tels que*

$$\lim_n y_n = y \quad \text{et} \quad |f(y_n) - f(y)| > \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}.(\star)$$

Il existe d'autre part $\alpha \in I$ et $(x_n)_n \subset I$ vérifiant

$$g(\alpha) = y \quad \& \quad g(x_n) = y_n$$

(il faut ici se garder de croire que la suite $(x_n)_n$ est nécessairement convergente ou même admet une sous-suite convergente, mais les pré-images $g^{-1}(\{y_n\})$ nous laissent suffisament de place pour construire une nouvelle suite elle convergente et ceci par l'intervention judicieuse du théorème des valeurs intermédiaires).

Quitte à considérer une sous-suite supposons $(y_n)_n$ monotone et même décroissante (même raisonnement si la suite est croissante). Nous avons donc dans $g(I)$

$$g(\alpha) = y \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0 = g(x_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

et dans I

$$\alpha \leq x_0$$

(on peut bien entendu avoir l'inégalité contraire, mais le raisonnement est le même) Les deux formules précédentes et le théorème des valeurs intermédiaires assurent pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un réel $x'_n \in [\alpha, x_0]$ vérifiant $g(x'_n) = g(x_n) = y_n$. De cette nouvelle suite inclue dans le compact $[\alpha, x_0]$ nous sommes donc assurés de pouvoir extraire un sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$ de limite $l \in [\alpha, x_0] \subset I$.

Par continuité de g sur I

$$\lim_k g(x'_{n_k}) = g(l)$$

mais d'un autre côté, nous avons aussi

$$\lim_k g(x'_{n_k}) = \lim_k g(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = y = g(\alpha)$$

ainsi

$$g(l) = g(\alpha).$$

Et enfin, par continuité de $f \circ g$ sur I, donc au point l :

$$\lim_k f(y_{n_k}) = \lim_k f \circ g(x_{n_k}) = \lim_k f \circ g(x'_{n_k}) = f \circ g(l) = f \circ g(\alpha) = f(y).$$

Il suffit maintenant de remarquer que les deux extrémités de cette formule contredisent ($\star$), d'où le résultat.

Remarque :

par contre si $f \circ g$ et f sont continues g n'a aucune raison de l'être : il suffit par exemple de considérer

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.