Continuité et connexité : le théorème de Borsuk-Ulam

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

4 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Continuité et connexité : le théorème de Borsuk-Ulam***

[1]

Soit f une application continue du cercle unité $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe sur le cercle deux points diamétralement opposés (antipodaux) en lesquels f prends la même valeur.

Solution : *Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}$ une application continue, considérons $g : S^1 \to \mathbb{R}$ définie par $g(z) = f(z) - f(-z)$, $z \in S^1$. Comme S^1 est un connexe de $\mathbb{R}^2$ et que g est continue, $g(S^1)$ est un connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle. En outre vu que $g(-z) = -g(z)$, cet intervalle est symétrique par rapport à l'origine : $0 \in g(S^1)$. Il existe donc $z \in S^1$ tel que $f(z) = f(-z)$ d'où le résultat.*

Remarques : *- Une telle fonction n'est donc pas injective et par conséquent S^1 n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$ (pour un tel résultat on peut plus classiquement si un tel homéomorphisme existe considérer sa restriction à S^1 moins un point (qui reste connexe !) mais dont l'image ne le reste plus...).*

- On peut aussi considérer (c'est en fait la même preuve..) la fonction $g : \theta \in [0, \pi] \mapsto g(\theta) = f(e^{i\theta}) - f(e^{i(\theta+\pi)})$, vu que $g(0) = -g(\pi)$ il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

- En guise « d'application », sur tout méridien terrestre il existe donc à chaque instant deux point antipodaux en lesquels la température est la même. On peut aussi démontrer qu'à chaque instant il existe sur terre deux point antipodaux pour lesquels température et pression sont identiques.

- Une autre belle application est le « problème de gâteau » : pour tout gâteau connexe borné (dans $\mathbb{R}^2$...) il existe deux perpendiculaires qui le divisent en quatre parts égales. Voir l'exercice ci-dessous.

Références

[1] Y.U. Shashkin. Fixed Points, volume 2 of Mathematical World. A.M.S., 1990.