L'équation fonctionnelle $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$ dans $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'équation fonctionnelle*** $f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y)$ ***dans*** $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.

Montrer que les solutions continues sur $\mathbb{R}$ et non identiquement nulles de l'équation fonctionnelle

$$f(\sqrt{x^2+y^2})=f(x)f(y),\quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}(\star)$$

sont de la forme $f(x)=f(1)^{x^2}$.

Solution : - *f n'étant pas identiquement nulle, il existe $a\in\mathbb{R}$ tel que $f(a)\neq 0$ et comme*

$$f(x)f(a)=f(\sqrt{x^2+a^2})=f(-x)f(a),$$

il en résulte que

$$f(x)=f(-x)=f(|x|),\quad x\in\mathbb{R},$$

et il est donc suffisant d'étudier f sur $\mathbb{R}_+$.

- *Montrons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^\star$ que*

$$f(x\sqrt{n})=f(x)^n,\quad \forall\, x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}^\star.$$

L'assertion est clairement vraie pour $n=1$, si on la suppose vraie au rang $n\geq 1$, alors

$$f(x\sqrt{n+1})=f(|x|\sqrt{n+1})=f(\sqrt{(x\sqrt{n})^2+x^2})=f(x\sqrt{n})f(x)=f(x)^nf(x)=f(x)^{n+1}$$

d'où la propriété au rang $n+1$.

- *On a alors pour $p,q\in\mathbb{Q}^\star$*

$$f(p)=f(|p|)=f(1\cdot\sqrt{p^2})=f(1)^{p^2},$$

mais aussi

$$f(1)^{p^2}=f(|p|)=f\left(\frac{p}{q}\sqrt{q^2}\right)=f\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2},$$

soit finalement

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)^{p^2/q^2} \quad \textbf{\textit{si}} \quad f(1) > 0.$$

La formule ($\star$) est vérifiée sur $\mathbb{Q}$ et donc sur $\mathbb{R}$ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et continuité de f) lorsque $f(1) > 0$. Il reste donc à examiner les autres cas :

$\rightsquigarrow$ *Si $f(1) = 0$, alors $f \equiv 0$ sur $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$ et ce cas est exclu.*

$\rightsquigarrow$ *Supposons enfin $f(1) < 0$, la formule établie plus haut donne pour $p, q \in \mathbb{Q}^\star$ avec p pair et q impair*

$$f\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2} = f(1)^{p^2}$$

qui implique $f(p/q) > 0$ puis (toujours par densité-continuité) $f \geq 0$ et $f(1) \geq 0$ ce qui est contradictoire.

Remarque : *On peut aussi vérifier aisément que l'application g définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ (si cela à bien un sens) par $g(x) = \log f(\sqrt{x})$ est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy $g(x+y) = g(x) + g(y)$ étudiée dans l'exercice précédent. Étant comme f continue nous aurons $g(x) = xg(1)$ puis $f(x) = f(1)^{x^2}$. Bien entendu, pour que cet argument tienne parfaitement la route il faut s'assurer que g soit bien définie sur $\mathbb{R}_+$ i.e. $f(\sqrt{x}) > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+$ ce que nous avons effectivement vérifié dans l'autre démonstration.*

Références