Les fonctions mid-convexes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Les fonctions mid-convexes***

[1], [2].

1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue ; montrer que f est convexe sur I si, et seulement si elle est mid-convexe, i.e.*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y), \quad \forall\, x, y \in I.(\star)$$

2. *Existe-t-il des applications mid-convexes mais non convexes ?*

Solution :

1. *Toute application convexe est bien entendu mid-convexe[1] ; pour la réciproque, classique mais plus délicate, on propose deux solutions :*

   \- ***Première solution :*** *C'est la plus classique, mais aussi peut être la plus délicate à présenter pour un oral, elle consiste à prouver $(\star)$ sur une partie dense de I puis de la prolonger à tout l'intervalle par continuité. On procède par étapes en démontrant successivement*

$$(1) \qquad f\left(\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} x_j\right) \leq \frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} f(x_j), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x_j \in I.$$

$$(2) \qquad f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j), \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^\star,\ x_j \in I.$$

$$(3) \qquad f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(y), \qquad \forall\, m, n \in \mathbb{N}^\star,\ x, y \in I.$$

   Par densité[2] de $\{\frac{m}{2^n},\ m, n \in \mathbb{N}^\star\}$ dans $[0,1]$, la continuité de f sur I permet d'étendre (3) à tout $p \in [0,1]$ i.e.

$$f(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y), \qquad \forall\, x, y \in I,\ p \in [0,1].$$

   f est bien convexe sur I.

- **Seconde solution :** *Elle (voir [?]) repose sur le théorème des valeurs intermédiaires. Si f n'est pas convexe il existe $a < c < b$ tels que le point $(c, f(c))$ soit au dessus de la corde reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$; et quitte à retrancher à f la fonction affine (donc convexe donc ne modifiant pas la quantité $f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2}f(y)$....) $x \mapsto f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, on peut supposer que $f(a) = f(b) = 0$ et dans ce cas $f(c) > 0$.*
Alors, l'ensemble $\{\, x \in [a, c] \ : \ f(x) = 0\}$ est non vide (il contient a) majoré et fermé (f est continue) : il admet donc un plus grand élément u qui est strictement plus petit que c car $f(c) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires et la définition de u, f est strictement positive sur $]u, c]$. De la même manière, on démontre l'existence d'un point $v \in]c, b[$ tel que f soit strictement positive sur $[c, v[$. Mais alors $f(\frac{u+v}{2}) > 0$ alors que $f(u) = f(v) = 0$ ce qui exclu la réalisation de $(\star)$ sur l'intervalle.

2. *Avec l'axiome du choix, on peut construire des fonctions mid-convexes non convexes, ce sont des objets pathologiques nulle part continus donc le graphe est dense dans $\mathbb{R}^2$, nous les avons deja rencontrés (et construits) dans l'exercice précédent, question*
3. *.*

Références

[1] R.P. Boas. A primer of real functions, volume 13 of The Carus Mathematical Monograph. A.M.S., 1981.

[2] J.M. Steele. The Cauchy-Schwarz Master Class. MAA Problem Books Series. M.A.A.& Cambridge University Press, 2004.