Baireries

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Baireries***

Soit $f\ :\ ]0,+\infty[$ *une application continue telle que*

$$\forall\, x>0,\quad \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right)=0.$$

A-t-on

$$\lim_{x\to 0_+} f\,(x)=0 \quad ?$$

Solution : *Définissons pour* $\varepsilon>0$ *et tout entier* $k\in\mathbb{N}$

$$F_k=\{0\}\cup\bigcap_{n\geq k}\left\{x>0\ :\ \left|f\left(\frac{x}{n}\right)\right|\leq\varepsilon\right\}.$$

f *étant continue, chaque ensemble* F_k *est fermé et vu les hypothèses sur* f

$$\bigcup_{k\geq 1}F_k=[0,+\infty].$$

On peut donc appliquer le théorème de Baire : un au moins des F_k*, disons* F_{k_0} *possède un intérieur non vide. Il existe donc* $a>0,\ \delta>0, k_0\in\mathbb{N}$ *tels que*

$$]a-\delta,a+\delta[\subset F_{k_0}$$

quitte à diminuer δ *on peut toujours supposer que* $a\leq\frac{\delta}{k_0}$.

Soit alors $0<x<\delta$ *et* $n=\left[\frac{x}{a}\right]$, *alors* $a-\delta\leq a-x\leq nx<a<a+\delta$ *et* $n\geq k$ *si bien que* $nx\in F_{k_0}$ *qui implique*

$$|f(x)|=\left|f\left(\frac{nx}{n}\right)\right|\leq\varepsilon,$$

En résumé, pour tout $\varepsilon>0$*, il existe* $\delta>0$ *tel que* $0<x<\delta$ *implique* $|f(x)|\leq\varepsilon$ *i.e.*

$$\lim_{x\to 0_+} f\,(x)=0,$$

et la réponse est oui.

Références