Sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sous-algèbres de dimension finie de*** $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

[1]

Déterminer les sous-algèbres de dimension finie de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Solution : *Il suffit de remarquer que pour toute application non constante* $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, *la famille* $(f^n)_n$ *est libre. En effet, une relation de liaison* $\lambda_0 + \lambda_1 f + \cdots + \lambda_d f^d = 0$ *assure que le polynôme* $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_d X^d$ *s'annule sur l'image de* f *qui est un intervalle non réduit à un point d'après le théorème des valeurs intermédiaires et les hypothèses sur* f : P *est donc le polynôme nul. La seule sous-algèbre de dimension finie dans* $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est celle des fonctions constantes, elle est de dimension* 1.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.