Automorphisme d'algèbre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Automorphisme d'algèbre de*** $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

[1]

Soit K un compact de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$. Montrer que tout automorphisme d'algèbre unitaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est une isométrie pour la norme uniforme.

Solution : *Comme dans l'exercice précédent, les fonctions inversible de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ sont celle qui ne s'annulent pas sur K et ϕ unitaire assure que f inversible équivaut à $\phi(f)$ où $\phi(f^{-1})$ inversible.*

Notons ϕ un tel morphisme et soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$. Il existe $x_0 \in K$ tel que $|f(x_0)| = \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f\|_\infty$ et quitte à considérer $-f$ on peut supposer que $\|f\|_\infty = f(x_0)$. L'application $g := f - f(x_0)\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 sur K) est par conséquent non inversible dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$, il en donc de même de son image $\phi(g) = \phi(f) - f(x_0)\mathbf{1}$. Ainsi, il existe $x_1 \in K$ tel que $\phi(g)(x_1) = 0$ i.e. $\phi(f)(x_1) = f(x_0)$ qui implique $\|\phi(f)\|_\infty \geq \|f\|_\infty$. L'inégalité inverse s'obtient de la même manière en considérant cette fois ϕ^{-1}.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.