Trois preuves du théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Trois preuves du théorème d'approximation de Weierstrass trigonométrique***

Soit $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$, montrer qu'il existe une suite de polynômes trigonométriques qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

1. *Commencer par montrer qu'il existe une suite d'applications affines par morceaux et 2π-périodiques qui converge uniformément sur $[-1,1]$ vers f puis conclure. Conclure.*
2. *En utilisant le théorème de Fejèr.*
3. *([1]) Une troisième approche plus constructive. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n(x) := (f \star u_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)u_n(t)dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

où

$$u_n(t) := c_n(1+\cos(t))^n,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad c_n^{-1} = \int_0^{2\pi} (1+\cos(t))^n dt.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est un polynôme trigonométrique.
b) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Solution :

1. *Soient $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ et $\varepsilon > 0$. Par continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-y| < \delta$ implique $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, considérons la subdivision σ_n de pâs constant $2\pi/n$ de l'intervalle $[0,2\pi]$; alors $2\pi/n \leq \delta$ assure que l'application 2π-périodique continue f_n, égale à f en chaque point de la subdivision et affine par morceaux sur $[0,2\pi]$ vérifie $\|f-f_n\|_\infty \leq \varepsilon$. En outre, chaque application f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux : la suite des sommes partielles de Fourier $(S_k(f_n))_k$ est donc (avec le théorème de Dirichlet) une suite (de polynômes trigonométriques) qui converge uniformément vers f_n. Comme*

$$\|f - S_k(f_n)\|_\infty \leq \|f-f_n\|_\infty + \|f_n - S_k(f_n)\|_\infty$$

le résultat suit.

2. *Les sommes partielle de Fourier de toute application $f \in \mathscr{C}_{2\pi}$ convergent au sens de Césaro uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f (c'est le théorème de Fejèr). D'où le résultat.*

3. *-a) On vérifie sans peine la continuité et la 2π-périodicité des applications f_n qui implique que $(f \star u_n)(x) = (u_n \star f)(x)$ sur $\mathbb{R}$. Les applications u_n étant visiblement des polynômes trigonométriques de degré n, nous pouvons écrire*

$$f_n(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)u_n(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)u_n(x-t)dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ik(x-t)}dt$$
$$= \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{ikx} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k 2\pi c_k(f) e^{ikx}$$

-b) Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $\int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)dt = 1$, on peut écrire si $0 < \delta < \pi$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))u_n(t)dt \right|$$
$$\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-t) - f(x)|u_n(t)dt + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) 2\|f\|_\infty u_n(t)dt \qquad (\star)$$

Soit $\varepsilon > 0$ par continuité uniforme de f sur $\mathbb{R}$, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que $|x - y| < \delta$ implique $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. Avec un tel choix comme u_n est paire et d'intégrale égale à 1 sur $[0, 2\pi]$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} u_n(t)dt + \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) 2\|f\|_\infty u_n(t)dt$$
$$\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} u_n(t)dt + 4\|f\|_\infty \int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt = \varepsilon + 4\|f\|_\infty \int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt \qquad (\star)$$

Comme le cosinus, u_n décroit sur $[\delta, \pi]$ et donc

$$\int_{\delta}^{\pi} u_n(t)dt \leq \pi c_n (1 + \cos(\delta))^n,$$

il ne reste plus qu'a majorer convenablement c_n i.e. minorer c_n^{-1} :

$$c_n^{-1} = 2\int_0^{\pi} (1 + \cos(t))^n dt \geq 2\int_0^{\pi} (1 + \cos(t))^n \sin(t)dt$$
$$= 2\left[-\frac{(1 + \cos(t))^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi} = \frac{2^{n+2}}{n+1}.$$

Soit finalement pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta \in]0, \pi[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \pi\|f\|_\infty \left(\frac{1 + \cos(\delta)}{2} \right)^n (n+1) \leq 2\varepsilon \quad \text{si } n \geq n_\varepsilon$$

(car $(1+\cos(\delta))/2 \in]0,1[$ *assure que le second terme tends vers* 0 *avec* n*). En resumé nous avons*

$$\forall\, \varepsilon,\ \exists\, n_\varepsilon\ :\ n \geq n_\varepsilon \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

La suite de polynômes trigonométriques $(f_n)_n$ *est donc bien uniformément convergente sur* $\mathbb{R}$ *vers* f

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : analyse 2. Cassini, 2001. [