Applications linéaires continues et compacité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Applications linéaires continues et compacité***

[1], 19 ? ?.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide (i.e. $\exists a > 0 \ : \ B(0,a) \subset K$) ; et soit $L := \{u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^d) \ : \ u(K) \subset K\}$. Montrer que L est une partie compacte de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.

L'hypothèse $\exists\, a > 0 \ : \ B(0,a) \subset K$ est-elle nécessaire ?

Solution : *$\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$ est de dimension finie (d^2), il est donc suffisant de montrer que L est fermé bornée dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^d)$.*

*-L **est borné :** $B^f(0,a) \subset K$ car K est fermé ; comme K est aussi borné, il existe $b > 0$ tel que $K \subset B^f(0,b)$. Par conséquent*

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \ : \quad u\left(a\frac{x}{\|x\|}\right) \in K \subset B^f(0,b)$$

où encore

$$\left(\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \ : \quad \|u(x)\| \leq \frac{a}{b}\|x\|\right) \Rightarrow \left(|||u||| \leq \frac{a}{b}\right).$$

i.e. $L \subset B^f_{L(\mathbb{R}^d)}(0, \frac{a}{b})$.

*-L **est fermé :** Soit $(u_n)_n$ une suite dans L qui converge vers $u \in L(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $x \in K$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \in K$; par conséquent $u(x) = \lim_n u_n(x) \in K$ puisque K est fermé : $u \in L$.*

-Si K est d'intérieur vide, la propriètè peut être fausse : par exemple, si $K \subset H = \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ (hyperplan de $\mathbb{R}^d$) toute affinité d'hyperplan fixe H et de vecteur directeur $e_d = (0, \dots, 0, 1)$ conserve K et est donc dans L, mais l'ensemble de ces affinités n'est visiblement pas bornée (considérer u_n definie par $u_n(e_i) = e_i,\ (1 \leq i \leq d-1)$ et $u_n(e_d) = ne_d$).

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.