Sur la norme d'une forme linéaire

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Sur la norme d'une forme linéaire***

[1], 2005.

Soient E un espace vectoriel normé, $\psi \in E'$ une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E. Soit $e \in E$ tel que $\psi(e) \neq 0$. Montrer que

$$|||\psi||| = \frac{|\psi(e)|}{\mathrm{dist(e, ker(\psi))}}.$$

Solution : *On peut commencer par remarquer que $\psi(e) \neq 0$ et $\ker(\psi)$ fermé assurent que $\mathrm{dist(e, ker(\psi))} > 0$.*

Pour $x \in \ker(\psi)$ nous avons

$$|\psi(e)| = |\psi(e - x)| \leq |||\psi||| \, \|e - x\|,$$

soit, en passant à la borne inférieure lorsque x décrit $\ker(\psi)$

$$|\psi(e)| \leq |||\psi|||\mathrm{dist(e, ker(\psi))}.$$

Pour obtenir l'inégalité inverse, par définition de la norme $|||\psi|||$, il est équivalent d'établir

$$\forall\, y \in E, \quad |\psi(y)| \leq \frac{|\psi(e)|}{\mathrm{dist(e, ker(\psi))}} \|y\|. (\star)$$

Cette formule évidente si $\psi(y) = 0$, est aussi homogène en y : il est donc suffisant (quitte à remplacer y par $y\psi(e)/\psi(y)$) de l'établir pour $y \in E$ vérifiant $\psi(y) = \psi(e)$. Dans ce cas, $y - e \in \ker(\psi)$ qui implique (classique) $\mathrm{dist(e, ker(\psi))} = \mathrm{dist(y, ker(\psi))} \geq \|\mathrm{y}\|$, et

$$|\psi(y)| \leq |\psi(y)| \frac{\|y\|}{\mathrm{dist(y, ker(\psi))}} = |\psi(y)| \frac{\|y\|}{\mathrm{dist(e, ker(\psi))}}$$

d'où $(\star)$, ce qui fallait démontrer.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.