Baireries : sur les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continues

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Baireries : sur les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ séparément continues***

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une séparément continue. Si f est nulle sur une partie dense de $\mathbb{R}^2$, montrer que f est identiquement nulle.

Solution : *Sinon, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $|f(a,b)| = c > 0$. L'application $y \mapsto f(a,y)$ étant par hypothèse continue sur $\mathbb{R}$ donc au point b, il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$|f(a,y)| \geq c/2, \qquad \forall\, y \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[.(\star)$$

Si on pose pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$

$$E_k = \{y \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\ : \ |f(x,y)| \geq c/4, \ \forall\, x \in]a-1/k, a+1/k[\},$$

on aura, avec $(\star)$

$$]b-\varepsilon, b+\varepsilon[= \bigcup_{k \geq 1} E_k.$$

Par le théorème de Baire, l'un au moins des ensembles E_k, disons E_m est non rare (i.e. $\overset{\circ}{\overline{E_m}} \neq \emptyset$) et il existe un intervalle $]\alpha, \beta[\subset \overset{\circ}{\overline{E_m}}$. Il n'est maintenant pas difficile de vérifier que

$$|f(x,y)| \geq c/4, \qquad \forall\, (x,y) \in]a-1/m, a+1/m[\times]\alpha, \beta[(\star)$$

ce qui fourni la contradiction désirée.

Pour vérifier $(\star)$, soit $(x,y) \in]a-1/m, a+1/m[\times]\alpha,\beta[$. Comme $y \in]\alpha, \beta[\subset \overset{\circ}{\overline{E_m}} \subset \overline{E_m}$, il existe une suite $(y_n)_n$ dans E_m convergente vers y et la continuité de $x \mapsto f(x,y)$ implique

$$\left(\lim_{n\to\infty}(x,y_n) = (x,y) \quad \& \quad (x,y_n) \in]a-1/m, a+1/m[\times]\alpha,\beta[\right) \Longrightarrow (|f(x,y)| \geq c/4).$$

soit $(\star)$.

Références