Un espace de Baire $A \subset \mathbb{R}$ non dénombrable et de mesure nulle

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Un espace de Baire*** $A \subset \mathbb{R}$ ***non dénombrable et de mesure nulle***

Soit $\{a_n\}$ une partie dénombrable dense dans $[0,1]$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$O_n(\varepsilon) =]a_n - 2^{-n}\varepsilon,\, a_n + 2^{-n}\varepsilon[, \quad O_\varepsilon = [0,1] \cap \bigcup_{n\geq 0} O_n(\varepsilon).$$

Montrer que $A = \bigcap_{p\geq 1} O_{1/p}$ est un espace de Baire non dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

Solution : - *Par sa définition, O_ε est un ouvert de $[0,1]$; contenant la suite $\{a_n\}$, il est aussi dense.*

Comme « **dans un espace de Baire le complémentaire de toute partie maigre est encore de Baire** » *(voir l'exercice précédent) : pour montrer que A est de Baire, il sera suffisant de montrer que son complémentaire (dans $[0,1]$) est maigre (i.e. réunion dénombrable d'ensembles rares). Or*

$$[0,1] \setminus A = \bigcup_{p\geq 1} [0,1] \setminus O_{1/p} = \underbrace{\bigcup_{p\geq 1} \left([0,1] \setminus \bigcap_{n\geq 1} O_n(1/p) \right)}_{\text{fermé de } [0,1] \text{ car } \cap \text{ de fermés}} := \bigcup_{p\geq 1} F_p$$

les fermés $F_p = [0,1] \setminus O_{1/p}$ sont visiblement d'intérieur vide (sinon l'ouvert $O_{1/p}$ éviterai un ouvert ce qui est absurde puisqu'il est dense car contenant la suit dense $\{a_n\}$) : A est bien un espace de Baire.

- *Pour montrer que A n'est pas dénombrable on s'appuie sur le résultat suivant* « **un espace de Baire séparé et sans points isolés est non dénombrable** » *(voir l'exercice précédent). Montrons donc que A est séparé et sans points isolés.*

- *Soient $x \neq y$ dans $A = \cap_p O_{1/p}$ et posons $\delta = |x-y|$. Le diamètre de $O_n(1/p)$ vaut $2/p2^n$ qui est $< \delta$ dès que p est suffisament grand et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour un tel choix de p, il existera $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $x \in O_{n_x}(1/p)$, alors $y \notin O_{n_x}(1/p)$; mais comme $y \in A$ il existe $n_y \neq n_x \in \mathbb{N}$ tel que $y \in O_{n_y}(1/p)$: A est bien séparé.*

- *A contenant la suite dense $\{a_n\}$ est sans points isolés.*
- *A est enfin de mesure de Lebesgue nulle car pour tout $\varepsilon > 0$*

$$\lambda(A) \leq \lambda(O_\varepsilon) \leq \sum_{n\geq 0} \lambda(0_n(\varepsilon)) = \sum_{n\geq 0} 2.2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon.$$

D'où le résultat.

Références