Sur les espaces de Baire

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ **Sur les espaces de Baire**

[1]

Soient X un espace topologique, Y un sous-espace de X

1. *Soit $A\subset Y$ un ensemble fermé d'intérieur vide (dans Y). Montrer que A est rare dans X i.e. $\mathring{\overline{A}^X}=\emptyset$.*
2. *Si $A\subset Y$ est maigre dans Y, montrer qu'il est maigre dans X.*
3. *Dans un espace de Baire, montrer que le complémentaire de toute partie maigre est un espace de Baire.*
4. *Montrer qu'un espace de Baire séparé et sans points isolés est non dénombrable.*

Solution :

1. *Sinon, l'adhérence de A dans X est d'intérieur non vide : il existe donc un ouvert O de X tel que $\mathring{\overline{A}^X}\neq\emptyset$ et par conséquent, tout fermé de X contenant A contient O. Soit F un fermé de Y contenant A : il existe un fermé L de X tel que $F=L\cap Y$. $A\subset F=L\cap Y$ implique $A\subset L$ et par suite $O\subset L$. Ainsi, pour tout fermé F de Y contenant A : $O\cap Y\subset F$, donc*

$$O\cap F\subset\overline{A}^Y.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que l'ouvert $O\cap F$ est non vide : si c'est le cas, comme O est un ouvert non vide de $\overline{A}^X$ on aurait $O\cap Y=\emptyset$ et $A\subset Y\implies O\cap A=\emptyset$ soit $O\subset(X\setminus\overline{A}^X)$ ce qui est absurde !

2. *Soit $A\subset Y$ une partie maigre de Y. A est donc contenue dans un réunion dénombrable de fermés (de Y) d'intérieur vide (dans Y) i.e.*

$$A\subset\bigcup_n F_n,\qquad F_n=\overline{F_n}^Y,\qquad \mathring{F_n}=\emptyset.$$

Avec la première question, les F_n sont rares dans X et comme $A\subset\cap_n\overline{F_n}^X$ est maigre dans X comme réunion dénombrable d'ensembles rares (dans X).

3. *Soit* $Y \subset X$ *une partie maigre d'un espace de Baire* X. *Supposons que* $Z = X \setminus Y$ *ne soit pas un espace de Baire, i.e. il existe une suite* $(F_n)_n$ *de fermés (de* Z*) d'intérieur vide tels que* $Z = \cup_n F_n$, *autrement dit* Z *est maigre dans* Z *et vu*
4. *,* Z *est maigre dans* X. *Ceci est absurde car l'espace de Baire* $X = Y \cup Z$ *serait maigre comme reunion de deux ensembles maigres. CQFD.*

5. *Soit* X *un espace de Baire séparé et sans points isolés, les singletons sont alors fermés d'intérieur vide et* X *ne peut être dénombrable (sinon* $X = \cup_n \{a_n\}$*....).*

Références

[1] Claude Wagschall. Topologie et Analyse Fonctionnelle. Hermann, 1995.