Surjectivité universelle de l'ensemble de Cantor

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

14 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Surjectivité universelle de l'ensemble de Cantor***

[1] 10/1998.

Il s'agit de quelques applications, souvent surprenantes de la propriété « universelle » de surjectivité de l'ensemble de Cantor C :

« Tout espace métrique compact est image continue de l'ensemble de Cantor »

(Alexandroff-Hausdorff)

1. *Il existe une surjection continue f de $[0,1]$ sur $[0,1]^d$.*
2. ***Une fonction continue qui interpole toute suite bornée :*** *Il existe une application continue $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour toute suite $\mathbf{y} = (y_n)_n \in [-1,1]^{\mathbb{Z}}$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que*
$$f(a+n) = y_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$
3. ***Le théorème de Banach-Mazur :*** *Tout Banach séparable est linéairement isométrique à un sous-espace de $\mathscr{C}([0,1])$.*

Solution :

1. *Par le théorème d'Alexandroff-Hausdoff, il existe une application continue surjective $f : C \to [0,1]^d$. On va prolonger f à tout l'intervalle $[0,1]$ par interpolation linéaire : le complémentaire de l'ensemble de Cantor dans $[0,1]$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts. Soit $]a,b[$ l'un de ces intervalles, on définit f sur $]a,b[= \{\, ta + (1-t)b,\ 0 < t < 1\}$ en posant*
$$f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b).(\star)$$
f ainsi prolongée est visiblement continue et par convexité du cube $[0,1]^d$ elle reste à valeurs dans le cube, soit $f([0,1]) = [0,1]^d$.

Remarques : *- Donner une référence pour la preuve du théorème de Alexandroff-Hausdorff.*

- Dans la première question, seule intervient la convexité du cube. On à donc en fait démontré : « Pour tout espace métrique compact convexe K d'un espace vectoriel topologique E (il faut tout même être dans un e.v.t. pour que le prolongement $(\star)$ soit continu), il existe

une surjection continue de $[0,1]$ sur K » . *Et même plus générallement* « Pour tout espace métrique compact K d'un espace vectoriel topologique E, il existe une application continue $f \in \mathscr{C}([0,1], E)$ telle que $K \subset f([0,1]) \subset \mathrm{conv(K)}$ » .

2. *Munissons l'ensemble $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ des suites $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ vérifiant $|y_n| \leq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$, de la topologie produit ; par le théorème de Tychonoff c'est un espace compact. Comme produit dénombrable d'espace métrisable, K est aussi métrisable (par exemple par $d(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|y_n - x_n|$, la compacité peut alors d'ailleurs de démontrer par un procédé d'extraction diagonal...).*

   Avec Alexandroff-Hausdorff, il existe donc une surjection continue ψ de C sur $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$: $t \in C \mapsto \psi(t) := (\psi_n(t))_{n\in\mathbb{Z}}$; $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ étant muni de la topologie produit, les applications coordonnées $\psi_n\ :\ C \to [-1,1]$ sont continues.

   On suppose ici que $C \subset [0,1/2]$ (par exemple l'image du Cantor standart par l'homéomorphisme $f(x) = x/2$) de telle sorte que

$$(C+n)\bigcap(C+m) = \emptyset, \quad \forall\, m \neq m \ \text{ dans } \ \mathbb{Z},$$

   ce qui permet de définir la fonction f sur $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(C+n)$ par

$$f(t+n) = \psi_n(t), \quad t \in C,\ n \in \mathbb{Z}.$$

   Vu A et ψ, f est bien définie et continue sur A et comme dans la question précedente ($\mathbb{R}\setminus A$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts ; on peut aussi bien entendu invoquer le théorème d'extension de Tietze) on prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction continue notée encore f à valeurs dans $[-1,1]$. La fonction f possède la propriété recquise : soit $\mathbf{y} = (y_n)_n \in [-1,1]^{\mathbb{Z}}$, il existe $t_0 \in C$ tel que $\psi(t_0) = \mathbf{y}$ i.e. $f(t_0+n) = \psi_n(t_0) = y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$.

   Remarques : *- On peut bien entendu remplacer $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ par $[-a,a]^{\mathbb{Z}}$ avec $a > 0$. Toutefois il n'est pas envisageable de contruire une application continue sur $\mathbb{R}$ qui interpole toutes les suites doublement (i.e. indicées dans $\mathbb{Z}$) bornées et même toute les suite constantes : en effet si tel était le cas on aurait*

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \exists\, t \in \mathbb{R}\ :\ f(t+n) = \alpha, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

   qui implique $f([0,1]) = \mathbb{R}$ contredisant la continuité de f.

   - Soit $\{M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite arbitraire d'entiers positifs ; en remplacant $[-1,1]^{\mathbb{Z}}$ par $\prod_{n\in\mathbb{Z}}[-M_n, M_n]$ la démontration précédente permet de travailler avec des suites $\mathbf{y} = (y_n)_n$ vérifiant $|y_n| \leq M_n,\ \forall\, n \in \mathbb{Z}$. Il est en particulier possible de construire une fonction continue qui interpole toutes les suites (indicées dans $\mathbb{N}$) bornées. Précisément : « Il existe $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que pour toute suite bornée $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(t+n) = y_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ » *. En effet, considèrons la fonction f obtenue avec la suite $M_n = n$ si $n \geq 0$ et $M_n = 0$ sinon. Avec ce choix, pour toute suite bornée $\mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|y_n| \leq k,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ et il existe alors $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(s+m) = 0$ si $m < k$ et $f(s+m) = y_{m-k}$ pour $m \geq k$, le choix $t = s+k$ convient.*

3. *Pour montrer que tout espace de Banach séparable X est isométrique*[1] *de* $\mathscr{C}([0,1])$, *on procède par étape :*

- ***Première étape :*** Tout espace de Banach séparable est isométrique à un sous-espace de $\mathscr{C}(K)$ où K est une partie compacte convexe métrisable d'un espace vectoriel topologique E.

Désignons par $X^\star$ le dual topologique de X. Tout élément $x \in X$ peut être considéré comme une forme linéaire sur $X^\star$ par

$$x(y^\star) := y^\star(x), \quad \forall\, y \in X^\star.(\star)$$

Si l'on muni $X^\star$ de la topologie $\sigma(X^\star, X)$ (où faible**, c'est la topologie la plus faible sur $X^\star$ rendant continue les éléments de X considérés comme fonctionnelles par ($\star$)), pour cette topologie, la boule unité K de $X^\star$ (la boule unité de l'espace de Banach $X^\star$) est une partie compacte, convexe et métrisable (*[**?**] *pages ? ? ?). Nous pouvons maintenant définir une isométrie J de X dans $\mathscr{C}(K)$ par*

$$J(x)(k) := k(x) = x^\star(k), \quad \forall\, x \in X,\ k \in K.$$

J est clairement linéaire, que $J(x) \in \mathscr{C}(K)$ résulte de la définition de la topologie $\sigma(X^\star, X)$, vérifions enfin que J est bien une isométrie. Pour tout $k \in K,\ x \in X$

$$|J(x)(k)| = |k(x)| \leq \|k\|_{X^\star}\|x\|_X \leq \|x\|_X$$

la première inégalité résulte de la définition de la norme sur $X^\star$ et la seconde du fait que K est la boule unité de $X^\star$ (i.e. $\|k\|_{X^\star} \leq 1$). Ainsi

$$\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} = \sup_{k \in K} |J(x)(k)| \leq \|x\|_X.$$

L'inégalité contraire est une conséquence d'un corollaire du théorème de Hahn-Banach ([**?**] *page ....) : pour tout $x \in X$ il existe $k_x \in K$ telle que $k_x(x) = \|x\|_X$. Alors*

$$\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} \geq J(x)(k_x) = k_x(x)\|x\|_X$$

soit finalement $\|J(x)\|_{\mathscr{C}(K)} = \|x\|_X,\ \forall\, x \in X$: J est bien une isométrie.

- ***Seconde étape :*** $\mathscr{C}(K)$ est isométrique à un sous espace de $\mathscr{C}([0,1])$.

Puisque K est un espace compact convexe métrisable, il existe (c'est la seconde remarque de la première question) une surjection continue $\psi\ :\ [0,1] \to K$. L'opérateur de composition défini sur $\mathscr{C}(K)$ par

$$T(f)(t) = f(\psi(t)), \quad t \in [0,1]$$

est un opérateur linéaire de $\mathscr{C}(K)$ dans $\mathscr{C}([0,1])$, c'est une isométrie car

$$\|T(f)\|_{\mathscr{C}([0,1])} = \sup_{t \in [0,1]} |f(\psi(t))| = \sup_{k \in K} |f(k)| = \|f\|_{\mathscr{C}(K)}$$

par surjectivité de ψ.

Remarques : *Dans l'article cité dans l'énoncé on trouvera d'autres applications, par exemple*

- ***Un ensemble convexe « universel »*** **:** *Pour tout* $d \in \mathbb{N}^\star$, *il existe un compact convexe* $K \subset \mathbb{R}^{d+2}$ *tel que tout compact convexe de* $\mathbb{R}^d$ *soit isométrique à l'une des faces de* K.
- *(Rudin, 1973) Il existe une suite uniformément bornée d'applications strictement positives* $(f_n)_n$ *continues sur* $[0,1]$ *(on peut même prendre des polynômes) vérifiant*

$\rightsquigarrow$ $f_n(x) \to 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$.

$\rightsquigarrow$ *Pour toute suite non bornée* $(\lambda_n)_n$ *de réels positifs, il existe* $x \in [0,1]$ *telle que* $\mathrm{limsup_n \lambda_n f_n(x)} = 0$.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.