Espace de Banach

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Espace de Banach***

[1]-1994/95.

Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach admettant une famille libre $(a_n)_{n\geq 1}$.

①

Montrer que $F_n := \text{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$ est fermé dans E.

②

Construire une suite $(\alpha_n)_n$ de réels strictement positifs vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\alpha_n.\|a_{n+1}\| \leq \frac{1}{3} d(\alpha_n a_n, F_{n-1}).$$

③

Justifier l'existence de $x = \sum_{k\geq 1} \alpha_k a_k$. Existe-t-il $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x \in F_n$?

④

Conclusion ?

Solution :

1. *E_n est un sous espace vectoriel normé de dimension finie de E il est donc complet (consultez votre manuel favori) et donc fermé dans E (dans un espace métrique, toute partie complète est fermée).*
2. *On procède par récurrence. α_0 se construit sans peine ; supposons $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ construits, puisque F_{n-1} est fermé et que $\alpha_n a_n \notin F_{n-1}$, on a $d_n := d(\alpha_n a_n, F_{n-1}) > 0$ si bien qu'en posant $\alpha_{n+1} = \dfrac{d_n}{3\|a_{n+1}\|}$ on tire*

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d(\alpha_{n+1} a_{n+1}, F_n) \leq d(\alpha_{n+1} a_{n+1}, 0) = \alpha_{n+1}\|a_{n+1}\| \\ &\leq \frac{1}{3} d_n = \frac{1}{3} d(\alpha_n a_n, F_{n-1}) \leq \frac{\alpha_n \|a_n\ Vert}{3} \end{aligned}$$

soit

3. *On déduit de la construction précédente que pour tout entier k*

$$\|\alpha_k a_k\| \leq \frac{\|\alpha_0 a_0\|}{3^k},$$

La série $\sum_n \alpha_k a_k$ est donc absolument convergente, et comme E est complet, elle converge.

4. ....

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.