Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: les classes de conjugaison

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Topologie dans*** $M_n(\mathbb{C})$ ***: les classes de conjugaison***

[1], [?].
Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ on définit la classe de conjugaison de A par

$$\mathscr{S}_A = \left\{ P^{-1}AP, \quad P \in GL_n(\mathbb{R}) \right\}.$$

1. *Si A est nilpotente, montrer que $0 \in \overline{\mathscr{S}_A}$.*
2. *Montrer l'équivalence entre :*

   (i) A est diagonalisable.

   (ii) $\mathscr{S}_A$ est fermée dans $M_n(\mathbb{C})$.
3. *Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que*

   (i) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est borné si, et seulement si $A \neq \lambda I_n,\ \lambda \in \mathbb{C}$.

   (ii) Montrer que $\mathscr{S}_A$ est connexe par arc, d'interieur vide dans $M_n(\mathbb{C})$.

Solution :

1. *C'est une conséquence immédiate de l'exercice précédent.*

2. *(i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$. Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples et est annulé par A, ie $\pi_A(A) = O$. En outre, $M \in \mathscr{S}_A \ \Rightarrow\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ :\ M^k = PA^kP^{-1} \ \Rightarrow\ \pi_A(M) = P \cdot \pi_A(A) \cdot P^{-1} = O$. Ainsi*

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \mathscr{S}_A$$

et par continuité[1] de $M \mapsto \pi_A(M)$

$$\pi_A(M) = O, \quad \forall\, M \in \overline{\mathscr{S}_A},$$

ainsi $\pi_A(B) = O$: la matrice $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$ est donc annulée par un polynôme scindé à racine simples et est donc diagonalisable. Pour s'assurer que $B \in \mathscr{S}_A$, il est maintenant suffisant de montrer que les matrices A et B ont mêmes valeurs propres et mêmes dimension de sous espaces propres.

Soient $\lambda \in \mathrm{spec}(A)$, $E_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \ : \ Ax = \lambda x\}$ le sous-espace propre associé et $F_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n \ : \ Bx = \lambda x\}$ et posons $n_\lambda = \dim E_\lambda,\ m_\lambda = \dim F_\lambda$. Soit $M \in \mathscr{S}_A$, M étant semblable à A : $\mathrm{rang}(M - \lambda I_n) = n - n_\lambda$ qui implique que les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de $M - \lambda I_n$ sont nuls. Ces mineurs dépendant polynomialement et donc continuement des coefficients, les mineurs d'ordre $n - n_\lambda + 1$ de B sont aussi nuls, soit :

$$n - m_\lambda = \mathrm{rang}(B - \lambda I_n) \leq n - n_\lambda$$

i.e.

$$m_\lambda \geq n_\lambda, \quad \forall \lambda \in spec(A).$$

En outre B étant diagonalisable

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} m_\lambda = n = \sum_{\lambda \in spec(A)} n_\lambda \leq \sum_{\lambda \in spec(A)} m_\lambda$$

qui implique $n_\lambda = m_\lambda$, $\forall\, \lambda \in spec(A)$ qui assure à son tour que B est semblable à A : $B \in \mathscr{S}_A$ soit $\mathscr{S}_A = \overline{\mathscr{S}_A}$.

(ii) $\Leftarrow$ (i). Supposons maintenant par contraposée A non diagonalisable. On peut écrire A sous la forme $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente non nulle et $ND = DN$. À conjugaison prés, on peut supposer

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \dots, \lambda_k I_{m_k})$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ étant les valeurs propres distinctes de A, $m_1, \dots, m_k$ leur multiplicité. Comme $ND = DN$, N est de la forme

$$N = \mathrm{diag}(N_1, \dots, N_k), \quad N_i \in M_{m_i}(\mathbb{C}),\ 1 \leq i \leq k,$$

et en effectuant les produits par blocs dans $ND = DN$ on voit que l'on peut[2] supposer les N_i triangulaires supérieures strictes. Alors, comme dans la preuve de la première question

$$D(q)^{-1}DD(q)) = D \quad \text{et} \quad \lim_q D(q)^{-1}ND(q)) = 0$$

qui implique

$$D = \lim_q D(q)^{-1}(D+N)D(q) = \lim_q D(q)^{-1}AD(q)$$

i.e. $D \in \overline{\mathscr{S}_A}$. D'un l'autre coté $D \notin \mathscr{S}_A$ puisque A n'est pas diagonalisable : $\mathscr{S}_A \neq \overline{\mathscr{S}_A}$ et la seconde implication est démontrée.

Remarques : - *Dans la solution de la question précédente il est démontré que pour toute matrice $A = D + N \in M_n(\mathbb{C})$ (décomposition de Dunford), la matrice diagonale D est toujours dans $\overline{\mathscr{S}_A}$.*

- *Suivant Francinou Gianella &...[?] on peut simplifier la preuve (i)⇒(ii) de la manière suivante : soient A diagonalisable, $B \in \overline{\mathscr{S}_A}$, avec $B = \lim_k A_k$ où $(A_k)_k \subset \mathscr{S}_A$. $A_k \in \mathscr{S}_A$ implique $\chi_A = \chi_{A_k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$ et par continuité de l'application $M \mapsto \chi_M$ il vient*

$$\chi_B = \lim_k \chi_{A_k} = \chi_A.$$

Mais aussi, comme nous l'avons remarqué plus haut $\pi_A(B) = O$: la matrice B annulée par un polynôme scindé à racines simples est diagonalisable. Les matrices A et B ont donc mêmes valeurs propres (comptées avec leur multiplicités) et sont diagonalisables : elles sont semblables et $B \in \mathscr{S}_A$.

3. - *Si $A = \lambda I_n$, $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $\mathscr{S}_A = \{A\}$ qui est bien bornée. Maintenant, si A n'est pas une matrice scalaire l'endomorphisme f canoniquement associé à A n'est pas une homothétie et un exercice classique d'algèbre linéaire[3] assure de l'existence d'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ tel que la famille $\{v, f(v) = Av\}$ soit libre. Considérons alors la base $\mathscr{B}_\lambda := \{v, \lambda Av, e_3, \cdots, e_n\}$ où $\lambda > 0$ et soit $A_\lambda \in \mathscr{A}$ la matrice de A dans cette base. En observant la première colonne de A_λ il vient $\|A_\lambda\|_\infty \geq \lambda^{-1} \longrightarrow +\infty$ lorsque λ tends vers 0 et $\mathscr{S}_A$ n'est pas bornée[4] dans $M_n(\mathbb{C})$.*

   - *Une classe de similitude n'est jamais ouverte et est même d'intérieur vide car tous les éléments d'une telle classe ayant même trace, elle est incluse dans un hyperplan affine de $M_n(\mathbb{C})$ donc d'intérieur vide.*

   Pour la connexité par arcs, ce n'est pas encore clair....

Références

[1] P. Tauvel. Exercices d'Algèbre Linéaire. Dunod, 2004.