Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: commutant et bicommutant

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Topologie dans $M_n(\mathbb{C})$: commutant et bicommutant***

$M_n(\mathbb{C})$ est muni de sa topologie canonique d'espace vectoriel normé. Montrer que

① *L'ensemble $\mathscr{F}$ des matrices semblables à une matrice compagnon (i.e. l'ensemble des matrices cycliques) est un ouvert connexe dense de $M_n(\mathbb{C})$.*

② *Si $n \geq 2$, l'application $\varphi \ : \ A \in M_n(\mathbb{C}) \mapsto \varphi(A) := \pi_A$ n'est pas continue.*

Soit $u \in \mathrm{End(E)}$ où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On rappelle que :

$$\mathrm{Com}(u) = \{v \in \mathrm{End(E)} \ : \ \mathrm{u \circ v = v \circ u}\}$$

$$\mathrm{Bicom}(u) = \{v \in \mathrm{End(E)} \ : \ \mathrm{u \circ w = v \circ w}\ ,\ \forall \mathrm{w} \in \mathrm{Com(u)}\} \subset \mathrm{Com(u)}$$

sont, respectivement, le commutant et le bicommutant de u. Si M est la matrice de u (peu importe le choix de la base de E), on a bien sûr les définitions similaires de $\mathrm{Com}(M)$, et $\mathrm{Bicom}(M)$.

③ *Montrer que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ son commutant $\mathrm{Com}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$ de dimension au moins n.*

④ *...................... ? ?*

Solution :

1. *Procédons par étapes :*

   - *Si $A \in \mathscr{F}$, il existe $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\left(A^k x_0\right)_{k=0}^{n-1}$ soit une base de $\mathbb{C}^n$. Alors, l'application continue sur $M_n(\mathbb{C})$*

   $$\varphi_{x_0} \ : \ M_n(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \varphi_{x_0}(A) := \det(x_0,\, Ax_0, \dots,\, A^{n-1}x_0)$$

   vérifie donc $\varphi_{x_0}(A) \neq 0$. Par continuité de φ_{x_0} en A il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_{x_0}(M) \neq 0$ pour tout $M \in B(A,\delta)$ i.e. $B(A,\delta) \subset \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est bien ouvert.

   - *Pour la connexité, vu que*

   $$A \in \mathscr{F} \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{C}),\, \exists\, a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n \ : \ A = P^{-1}C(a)P,$$

   où $C(a)$ est la matrice compagnon associée au vecteur $a \in \mathbb{C}^n$. Autrement dit $\mathscr{F} = \psi(GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n)$ avec

   $$\psi \ : \ GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n \ni (P, a) \mapsto \psi(P, a) := P^{-1}C(a)P.$$

ψ est une application clairement continue de l'ouvert $GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$ connexe (comme produit des deux ouverts connexes $GL_n(\mathbb{C})$, et ***attention !*** *$GL_n(\mathbb{R})$ lui n'est pas connexe si $n \geq 1$...) et $\mathbb{C}^n$: $\mathscr{F}$ est donc bien connexe comme image continue d'un connexe.*

- Il nous reste à établir la densité : mais il est bien connu que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices à valeurs propres deux à deux distinctes donc semblables à des matrices de Frobenius d'où la densité.

2. *Supposons φ continue, il en sera alors de même pour*

$$\psi \ : \ M_n(\mathbb{C}) \ni A \mapsto \psi(A) := p_A - (-1)^n \pi_A \in \mathbb{C}[X]$$

mais alors

$$\mathscr{F} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \, : \, p_A = (-1)^n \pi_A\} = \psi^{-1}(\{0_{\mathbb{C}[X]}\})$$

est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Nous avons vu plus haut que $\mathscr{F}$ est ouvert : c'est donc une partie à la fois ouverte, fermée, non vide du connexe $M_n(\mathbb{C})$, la seule alternative est $\mathscr{F} = M_n(\mathbb{C})$: égalité absurde si $n \geq 2$ et trivialle si $n = 1$.

3. *Pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ on a l'inclusion évidente $\mathbb{C}[A] \subset \mathrm{Com}(A)$; mais, si A est cyclique $\mathbb{C}[A] = \mathrm{vect}\{I_n, A, \dots, A^{n-1}\}$ est (lemme fondamental) de dimension n, et*

par ailleurs, l'ensemble des matrices cycliques $\mathscr{C}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Par transitivité de la densité, il sera donc suffisant de montrer que l'ensemble

$$F := \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \dim \mathrm{Com}(A) \geq n\}$$

est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$. Pour établir ce dernier point, considérons, si $A \in M_n(\mathbb{C})$, l'endomorphisme $\varphi_A \in \mathscr{L}(M_n(\mathbb{C}))$ défini par

$$\varphi_A(B) = AB - BA,$$

avec ce choix

$$\ker(\varphi_A) = \mathrm{Com}(A)$$

si bien que

$$F = \{\, A \in M_n(\mathbb{C}) \ : \ \mathrm{rang}(A) \leq n^2 - n\}.$$

Sous cette forme, il est n'est pas difficile de vérifier que F est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$: soit $A \in \overline{F}$, il existe dans F une suite $(A_k)_k$ de limite A, ce qui implique aussitot : $\lim_k \varphi_{A_k} = \varphi_A$. Montrer que $A \in F$ est maintenant une conséquence immédiate de la semi-continuité inférieure de l'application rang en dimension finie, précisément :

Pour tout espace vectoriel E de dimension finie d et tout entier $1 \leq k \leq d$, les ensembles de niveau $\mathscr{R}_k = \{T \in \mathscr{L}(E) \ : \ \mathrm{rang}(T) \leq k\}$ sont fermés dans $\mathscr{L}(E)$.

En effet, pour $T \in \overline{\mathscr{R}_k}$, $(T_l)_l \subset \mathscr{R}_k$ de limite T : si $r = \mathrm{rang}(T)$, la matrice T admet un mineur $\Delta_r(T)$ non nul et par continuité : $\lim_l \Delta_r(T_l) = \Delta_r(T) \neq 0$. Il existe donc l_0 tel que $l \geq l_0$ implique $\Delta_r(T_l) \neq 0$; autrement dit : $\forall l \geq l_0 \ : \ k \geq \mathrm{rang}(T_l) \geq r$ i.e. $k \geq r \implies T \in F$. Le résultat suit avec $T = \varphi_A,\ T_l = \varphi_{A_l}$.

Remarques :

- *La démonstration de la non continuité $A \mapsto \pi_A$ donnée dans la seconde question n'est bien entendu pas celle que l'on doit fournir le jour d'un oral (le pré-requis est trop important). Il faut impérativement connaitre la suivante, classique, rapide et simple : Supposons φ continue, l'ensemble $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ des matrices à valeurs propres deux à deux distinctes étant (cf exercice ? ? ?) dense dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe une suite $(A_k)_k \subset \mathscr{D}'_n(\mathbb{C})$ telle que*

$$I_n = \lim_{k\to\infty} A_k.$$

Par continuité de φ

$$\pi_{I_n} = \lim_{k\to\infty} \pi_{A_k}$$

mais sur $\mathscr{D}'_n(\mathbb{C}) \ : \ (-1)^n \pi_A = P_A$ si bien que

$$X - 1 = \pi_{I_n} = \lim_{k\to\infty} \pi_{A_k} = \lim_{k\to\infty} P_{A_k} = P_{I_n} = (-1)^n (X-1)^n$$

égalité absurde si $n > 1$ (si $n = 1$ polynôme minimal et caractéristique coïncident d'où l'évidente continuité de φ) l'application est donc discontinue en I_n.

- *Sur la dimension et parler du bicommutant............voir un autre exo.........*

Références