Un opérateur borné sans adjoint

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Un opérateur borné sans adjoint***

On munit $\mathbb{C}[X]$ du produit scalaire

$$\forall\, P, Q \in \mathbb{C}[X] \ : \ \langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)\overline{Q(t)}dt.$$

Montrer que l'opérateur $T \,:\, P \in \mathbb{C}[X] \mapsto T(P) = P'$ n'a pas d'adjoint.

Solution : *Supposons que T admette un adjoint $T^\star$. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = x^n$, alors*

$$\begin{aligned}\langle\, p_n, T^\star p_0\rangle &= \int_0^1 t^n \overline{T^\star p_0(t)}dt \\ &= \int_0^1 T(t^n)\overline{p_0(t)}dt \\ &= \int_0^1 nt^{n-1}dt = 1\end{aligned}$$

mais de l'autre côté, avec Cauchy-Schwarz

$$1 = |\langle\, p_n, T^\star p_0\rangle| \le \|p_n\| \cdot \|T^\star p_0\| \le \sqrt{\frac{1}{2n+1}}\|T^\star p_0\| < 1 \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

d'où la contradiction.

Références