

Connexité

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Connexité

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose f' identiquement nulle (respectivement > 0) sur Ω ; f est-elle constante sur Ω (resp. strictement croissante) sur Ω ?

Solution : Bien sûr que non ! il suffit de considérer pour le premier cas l'application $f : \Omega = \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0, \\ +1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

et pour le second la fonction $g : \Omega = \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ où $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Remarque : dans les deux cas c'est la non connexité de Ω qui fait capoter ce résultat archi-classique.

Références