Le théorème de Riesz dans un espace de Hilbert : c'est facile !

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Le théorème de Riesz dans un espace de Hilbert : c'est facile !***

Soit H un espace de Hilbert.

① *On suppose la boule unité $\mathscr{B}_H := \{x \in H \ : \ |\langle x, x\rangle| \leq 1\}$ compacte. Montrer que H est de dimension finie.*

② *On suppose H de dimension infinie. Soit $\mathscr{E} := \{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormée. Montrer que $\mathscr{E}$ est un fermé borné non compact de H.*

Solution :

1. *Supposons H de dimension infinie, on peut alors construire dans H (Hilbert-Schmidt) une famille orthonormale $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ bien entendu incluse dans $\mathscr{B}_H$. Mais pour tout $i \neq j \ : \ \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$, toute boule ouverte dans H de rayon $\sqrt{2}/2$ ne peut donc contenir plus d'un vecteur e_j : il est par conséquent exclus d'espérer du recouvrement ouvert de $\mathscr{B}_H$*

$$\mathscr{B}_H \subset \bigcup_{x\in\mathscr{B}_H} B(x, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

extraire un sous-recouvrement fini ; contradiction.

   (a) *H est de dimension infinie : soit $\mathscr{E} := \{e_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ une famille orthonormale, elle est visiblement bornée. Montrons qu'elle est fermée : soit $x \in \overline{\mathscr{E}}$: il existe une suite $(e_{\varphi(k)})_k \subset \mathscr{E}$ qui converge vers x. On a donc $\lim_k \|e_{\varphi(k+1)} - e_{\varphi(k)}\| = 0$, mais pour tout $i \neq j \ : \ \|e_i - e_j\| = \sqrt{2}$. La seule alternative est alors que φ soit constante à partir d'un certain rang k_0 i.e. $x = e_{\varphi(k_0)} \in \mathscr{E}$ qui est donc fermé.*
   Comme pour la question précédente $\mathscr{E}$ n'est pas compact vu le recouvrement ouvert $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(e_n, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

   Remarque : *C'est bien sûr la version « Hilbert » du célèbre théorème de Riesz dont la preuve est un peu plus délicate. Le cadre particulier des espaces de Hilbert permet cette très simple et élégante approche.*

Références