Autour des sous-groupes de $\mathbb{R}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

29 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Autour des sous-groupes de*** $\mathbb{R}$

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

1. *Montrer que G est soit dense soit monogène (i.e. $\exists\, a \geq 0 \ : \ G = a\mathbb{Z}$).*
2. *Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^\star$ montrer que $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.*
3. *En déduire un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A + B$ ne soit pas fermé.*
4. *à toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on associe son groupe des périodes*

$$G_f := \{T \in \mathbb{R} \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ \ f(x+T) = f(x)\}.$$

Montrer que G_f est bien un groupe et que f est toujours constante sur G_f.

5. *Si de plus f est continue, montrer que*

$$(f \text{ est non constante }) \iff (\ G_f \text{ est monogène }\ )$$

6. *Donner l'exemple d'une fonction f non constante munie d'un groupe des périodes dense.*
7. *Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.*
8. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

   - *Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $X = (x,y)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X + (1,0)) = f(X + (0,1)) = f(AX)$?*

   - *Même question avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.*

Solution :

1. *On exclut le cas trivial $G = \{0\}$. La procédure est classique : considérons $a := \inf\{g \in G \ :$*

$g > 0\}$, *a est donc* ≥ 0.

-Si $a > 0$ *: tout d'abord, remarquons que* $a \in G$ *sinon par définition de l'inf, il existerait* x *et* y *dans* G *tels que* $0 < a < x < y < 2a \Longrightarrow 0 < y - x < a$ *ce qui est absurde vu la définition de* a *car* $y - x \in G$.

$a \in G \Longrightarrow a\mathbb{Z} \subset G$. *Réciproquement, si* $x \in \mathbb{G}$ *l'ensemble* $\{n \in \mathbb{N} : \ na > x\}$ *est non vide, donc il admet un plus petit élément* $n_0 + 1$. *On a* $n_0 a \leq x < (n_0 + 1)a$ *mais* $n_0 a < x \Longrightarrow 0 < x - n_0 a < a$ *inégalités encore une fois absurdes :* $x = n_0 a$ *et finalement* $G = a\mathbb{Z}$.

-Supposons maintenant $a = 0$, *pour montrer que* G *est dense il est équivalent de montrer que* $\forall\, x < y$ *dans* $\mathbb{R}$ *il existe* $g \in G$ *avec* $x < g < y$. $a = 0 \Longrightarrow \ \exists\, g \in G$ *tel que* $0 < g < y - x$ *on conclut alors comme dans le premier cas.*

2. *-Si* $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *avec* p *et* q *premiers entre eux*

$$\begin{aligned} G &= a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \\ &= \{na + mb,\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{na + \frac{qam}{p},\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{(np + qm)\,\frac{a}{p},\ n, m \in \mathbb{Z}\} \\ &= \frac{a}{p}\mathbb{Z} \qquad \textit{par Bezout.} \end{aligned}$$

-Réciproquement s'il existe $c > 0$ *tel que* $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$ *il existe* $n, m \in \mathbb{Z}^\star$ *tels que* $a = nc$ *et* $b = mc$ *soit* $a/b = n/m$. *CQFD*

3. *Vu la question précédente,* $G = \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ *est un sous-groupe dense de* $\mathbb{R}$, *distinct de* $\mathbb{R}$ *(*$1/2 \in G \Longrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ *!) bien que* $\mathbb{Z}$ *et* $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ *soient fermés dans* $\mathbb{R}$.
4. G_f *est toujours non vide (*$0 \in G_f$*) le reste suit tout aussi facilement.*
5. *Avec la première question, il est équivalent de montrer que*

$$(f \textit{ est constante }) \iff (\ G_f \textit{ est dense }\ )$$

f étant continue, ceci est immédiat.

6. *Si*

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

on vérifie sans peine que $G_f = \mathbb{Q}$ *: la continuité est donc essentielle dans la question précédente.*

7. *Remarquons que*

$$\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\} = \{\cos(n + 2\pi m),\ n, m \in \mathbb{Z}\} = \cos(G)$$

où G *est le sous groupe dense* $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. *On conclut facilement la fonction cosinus étant continue et surjective de* $\mathbb{R}$ *sur* $[-1, 1]$ *(par exemple car* f *continue ssi* $\forall\, A \ : \ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$*...) De la même manière on peut montrer avec* $f(x) := \exp(2i\pi x)$ *que* $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ *a une image par* f *dense dans le cercle unité pour tout* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

8. - *Soit f une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique telle que $f \circ A = f$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.*

On a ainsi, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = f(x + y, y)$. Autrement dit, $u \mapsto f(u, y)$, qui est a priori 1-périodique, est également y-périodique. Si y est irrationnel, l'argument utilisé dans a prouve que cette fonction est constante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \qquad f(x, y) = f(0, y).$$

Par continuité de $y \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(0, y)$ et densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on obtient donc :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = f(0, y)$$

Inversement, si f vérifie cette condition, c'est-à-dire si $f(x, y)$ est indépendante de x, f vérifie bien $f \circ A = f$.

- Soit enfin f une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant $f = f \circ A$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'endomorphisme A a deux valeurs propres :

$$\mu = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \qquad et \qquad \lambda = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

de sorte que $|\mu| < 1 < |\lambda|$. Soient u (resp. v) un vecteur propre de A associé à μ (resp. λ). Si $X = xu + yv$ où (x, y) est dans $\mathbb{R}^2$ on a , pour $n \in \mathbb{N}$:

$$f(X) = f(A^n X) = f\left(x\mu^n u + y\lambda^n v\right) (\star)$$

Mais f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{Z}^2$-périodique donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$ (vérification en fin de solution). Il s'ensuit que :

$$\lim_{n \to \infty} f\left(x\mu^n u + y\lambda^n v\right) - f\left(y\lambda^n v\right) = 0$$

(car $x\mu^n u \to 0$ quand $n \to +\infty$). Par suite : $f(X) = f(xu)$. Ceci montre que $f(xu + yv)$ ne dépend pas de y. Mais en utilisant $(\star)$ pour n dans $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, et en faisant tendre n vers $-\infty$, il vient $f(X) = f(yv)$. Autrement dit $f(xu + yv)$ ne dépend pas de x. En fin de compte, f est constante sur $\mathbb{R}^2$. -

Remarque : Preuve de l'uniforme continuité d'une fonction continue et $\mathbb{Z}^2$ périodique de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. *Soient f une telle fonction et $||\ ||_\infty$ la norme définie sur $\mathbb{R}^2$ par $||(x_1, x_2)||_\infty = \mathrm{Max}(|x_1|, |x_2|)$. La restriction de f au compact $K = [-1, 1]^2$ est uniformément continue. Soient donc $\varepsilon > 0$ et $\delta \in]0, 1/2[$ tels que :*

$$\forall (x, y) \in K^2, \qquad ||x - y||_\infty \leq \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Soient enfin x et y dans $\mathbb{R}^2$ tels que $||x - y||_\infty \leqslant \delta$. Soit m dans $\mathbb{Z}^2$ tel que $x' = x - m$ soit dans $[-1/2, 1/2]^2$. Alors $y' = y - m$ vérifie $||y' - x'||_\infty \leqslant \delta$, donc $(x', y') \in K^2$ et :

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| \leqslant \varepsilon.$$

Références