

Autour des sous-groupes de $\mathbb{R}$

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

15 août 2023

Exercice 0.1 ★ **Autour des sous-groupes de $\mathbb{R}$**

Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que G est soit dense soit monogène (i.e. $\exists a \geq 0 : G = a\mathbb{Z}$).
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ montrer que $G = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.
3. En déduire un exemple de deux fermés A, B de $\mathbb{R}$ tels que $A + B$ ne soit pas fermé.
4. à toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on associe son groupe des périodes

$$G_f := \{T \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}.$$

Montrer que G_f est bien un groupe et que f est toujours constante sur G_f .

5. Si de plus f est continue, montrer que

$$(f \text{ est non constante}) \iff (G_f \text{ est monogène})$$

6. Donner l'exemple d'une fonction f non constante munie d'un groupe des périodes dense.
7. Montrer que $\{\cos(n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que pour tout $X = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$, $f(X) = f(X + (1, 0)) = f(X + (0, 1)) = f(AX)$?
 - Même question avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Références