Topologie dans $M_n(\mathbb{R})$: l'adhérence de $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Topologie dans*** $M_n(\mathbb{R})$ ***: l'adhérence de*** $\mathscr{D}_n(\mathbb{R})$
[1]-1999.

①

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ si, et seulement si

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \quad : \quad |P(z)| \geq |Im(z)|^{\deg(P)}.(\star)$$

②

Soit $(A_k)_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite convergente de matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $A := \lim_k A_k$ est trigonalisable.

③

En déduire l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables.

Solution :

1. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire, de degré d. Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, on a, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les zéros de P*
$$P(z) = \prod_{k=1}^{d}(z - \lambda_k).$$
Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$
$$|P(z)| = \prod_{k=1}^{d}|z - \lambda_k| = \prod_{k=1}^{d}|\mathrm{re}(z) - \lambda_k - iIm(z)| \geq |Im(z)|^d$$
(la dernière inégalité n'est rien d'autre que $|z| \geq |Im(z)|$.....) La réciproque est évidente puisque (6) implique que les racines de P sont réelles.

2. *Soit $(A_k)_k \in M_n(\mathbb{R})$ une suite convergente de matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ et A sa limite, les polynômes caractéristiques P_{A_k} sont donc scindés sur $\mathbb{R}$ soit*
$$\forall\, z \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N} \quad : \quad |P_{A_k}(z)| \geq |im(z)|^n.$$

Il ne reste plus qu'à invoquer la continuité de l'application $A \mapsto P_A$ pour en déduire que

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad : \quad |P_A(z)| \geq |im(z)|^n.$$

Vu

(a) *, P_A est scindé sur $\mathbb{R}$: A est donc triangularisable.*

(b) *Le polynôme caractéristique d'une matrice diagonale dans $M_n(\mathbb{R})$ étant scindé sur $\mathbb{R}$, les questions précédentes assurent que l'adhérence dans $M_n(\mathbb{R})$ de l'ensemble des matrices diagonalisables est inclue dans l'ensemble des matrices triangularisables. L'inclusion inverse est facile à vérifier (raisonner comme dans la seconde partie de 'exercice précédent...).*

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.