Espace métrique et continuité

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Espace métrique et continuité***

[1], (2003), PROBLÈME 10998.

On considère dans un espace métrique (X, d) une partie D non vide, ouverte, connexe et relativement compacte. Soit $f : D \to D$ une application continue. Si $f(D)$ est ouvert, montrer qu'il existe $x_0 \in D$ tel que

$$d(x_0, \partial D) = d(f(x_0), \partial D).$$

Solution : *- La continuité de $h : X \ni x \mapsto d(x, \partial D)$ est classique. Par conséquent, l'application définie par $g(x) := d(f(x), \partial D) - d(x, \partial D)$ est aussi continue. Nous allons montrer successivement qu'il existe z_0 et y_0 dans D vérifiant $g(z_0) \leq 0$ et $g(y_0) \geq 0$. L'existence de x_0 résulte alors de la connexité de D via la continuité de f.*

- h étant continue et $\overline{D}$ compact, il existe $z_0 \in \overline{D}$ tel que $h(z_0) = d(z_0, \partial D) = \sup_{z \in \overline{D}} d(z, \partial D)$. D étant ouvert et non vide : $h(z) > 0$, $\forall z \in D$ de sorte que $z_0 \in D$. Enfin comme $f(z_0) \in D$: $d(f(z_0), \partial D) \leq d(z_0, \partial D)$; autrement dit $g(z_0) \leq 0$.

- Pour l'existence de y_0 on distingue deux cas :

▷ Si $f(D) = D$, alors il existe $y_0 \in D$ tel que $f(y_0) = z_0$. Alors $g(y_0) = d(z_0, \partial D) - d(y_0, \partial D) \geq 0$.

▷ Si $f(D) \neq D$ et puisque D est connexe et $f(D)$ ouvert il existe $w \in D \cap \partial f(D)$ tel que $w \notin f(D)$ (sinon on aurait une partition de D en deux ouverts disjoints non vides...). Considérons alors une suite $(y_n)_n$ dans D telle que $f(y_n) \to w$. $\overline{D}$ étant compact, on peut (quitte à extraire une sous-suite) supposer la suite $(y_n)_n$ convergente, disons vers $\alpha \in \overline{D}$. $w \notin f(D)$ implique $\alpha \in \partial D$ et par conséquent $d(y_n, \partial D) \to 0$. toutefois $\lim_n d(f(y_n), \partial D) = d(w, \partial D) > 0$: nous avons donc pour n assez grand $g(y_n) > O$. CQFD

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.