Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

29 novembre 2022

Exercice 0.1 ★ ***Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor***

[1],2004/05, ? ?, 114-2,

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $f : [a, +\infty[$ *une fonction réelle de classe* C^{n+1}. *On se propose d'utiliser les résultats du cours pour donner une preuve assez inhabituelle du résultat suivant :*

« Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $[a, +\infty[$, il en est de même pour les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n)}$. »

1. *Soit* $\delta > 0$, *pour* $Q = \sum_{k=0}^n c_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$, *on pose*

$$N_1(Q) = \max_{0 \leq k \leq n} |c_k| \quad et \quad N_2(Q) = \sup_{x \in [0,\delta]} |Q(x)|.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\star$ *telles que*

$$\mu N_2(Q) \leq N_1(Q) \leq \lambda N_2(Q), \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2. *Pour tout* $x \geq a$ *et* $\delta \geq u > 0$ *montrer que (utiliser Taylor-Lagrange)*

$$\left| f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!} \right| \leq \|f\|_\infty + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty := M,$$

où $\|g\|_\infty := \sup_{x \geq a} |g(x)|$.

En déduire que pour tout $x \geq a$ *(en notant* $P_x(X) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$*) on a :*

$$N_2(P_x) \leq M.$$

3. *En déduire la version faible des inégalités de Kolmogorov*

$$\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\} \ : \ \|f^{(k)}\|_\infty \leq k!\lambda M.$$

Solution :

1. *N_1 et N_2 sont deux normes sur $\mathbb{R}_n[X]$ espace vectoriel de dimension finie $n+1$: elles sont donc équivalentes.*
2. *Avec Taylor-Lagrange nous avons pour tout $x \geq a,\ \delta \geq u > 0$*

$$f(x+u) = f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!} + \frac{u^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\zeta) \quad \text{où} \quad \zeta \in]x, x+u[,$$

soit

$$\left| f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!} \right| \leq |f(x+u)| + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\| \leq \|f\| + + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|$$

nous avons donc pour tout $x \geq a$

$$\sup_{0\leq u\leq\delta} \left| f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!} \right| = \sup_{0\leq u\leq\delta} |P_x(u)| = N_2(P_x) \leq M$$

3. *Il ne reste plus qu'à combiner les deux inégalités : $N_1(P_x) \leq \lambda N_(P_x)$.*

Remarques : *- Pour une fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ si f et f'' sont bornées sur $\mathbb{R}$ il en est de même pour f' et on a les inégalités de Kolmogorov à l'ordre 2 (avec $M_i = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(x)|,\ i = 0, 1, 2$)*

$$M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

La preuve repose sur l'inégalité de Taylor-Lagrange qui assure que pour tout réel x et tout $h > 0$:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2M_2}{2}$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Taylor-Lagrange entre cette fois-ci x et $x-h$ on a

$$|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2M_2}{2}.$$

Ces deux inégalités et l'inégalité triangulaire donnent pour tout $x \in \mathbb{R},\ h > 0$

$$|f(x+h) - f(x-h) + 2hf'(x)| \leq h^2M_2$$

soit

$$|f'(x)| \leq \frac{hM_2}{2} + \frac{M_0}{h} := g(h), \quad \forall\, h \in \mathbb{R}_+^\star.$$

Un calcul rapide montre que l'inf de g sur $\mathbb{R}_+^\star$ vaut $\sqrt{2M_0M_2}$ pour $h = \sqrt{\dfrac{M_2}{2M_0}}$ soit finalement

$$|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, f' est bornée et $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

- Avec plus de persévérence on démontre (voir par exemple ....) les inégalités de Kolmogorov : soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R})$. Si f et $f^{(n)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, il en est de même des dérivées intermédiaires et on a (avec les mêmes notations que dans la remarque précédente)

$$M_k \leq 2^{\frac{k(k-n)}{2}} M_0^{1-\frac{k}{n}} M_n^{\frac{k}{n}}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.