Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

5 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor***

[1],2004/05, ? ?, 114-2,

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ *et* $f \;:\; [a,+\infty[$ *une fonction réelle de classe* C^{n+1}. *On se propose d'utiliser les résultats du cours pour donner une preuve assez inhabituelle du résultat suivant :*

« Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $[a,+\infty[$, il en est de même pour les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n)}$. »

1. *Soit* $\delta > 0$, *pour* $Q = \sum_{k=0}^n c_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$, *on pose*

$$N_1(Q) = \max_{0\le k\le n} |c_k| \quad \text{et} \quad N_2(Q) = \sup_{x\in[0,\delta]} |Q(x)|.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^\star$ *telles que*

$$\mu N_2(Q) \le N_1(Q) \le \lambda N_2(Q), \quad \forall\, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2. *Pour tout* $x \ge a$ *et* $\delta \ge u > 0$ *montrer que (utiliser Taylor-Lagrange)*

$$\left| f(x) + f'(x)u + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{u^n}{n!}\right| \le \|f\|_\infty + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_\infty := M,$$

où $\|g\|_\infty := \sup_{x\ge a} |g(x)|$.

En déduire que pour tout $x \ge a$ *(en notant* $P_x(X) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$*) on a :*

$$N_2(P_x) \le M.$$

3. *En déduire la version faible des inégalités de Kolmogorov*

$$\forall\, k \in \{0, 1, \dots, n\} \;:\; \|f^{(k)}\|_\infty \le k!\lambda M.$$

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.