

Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Démonstration des inégalités faibles de Kolmogorov via les normes équivalentes, formule de Taylor

[1], 2004/05, ??, 114-2,

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, +\infty[$ une fonction réelle de classe C^{n+1} . On se propose d'utiliser les résultats du cours pour donner une preuve assez inhabituelle du résultat suivant :

« Si f et $f^{(n+1)}$ sont bornées sur $[a, +\infty[$, il en est de même pour les dérivées intermédiaires $f', f'', \dots, f^{(n)}$. »

1. Soit $\delta > 0$, pour $Q = \sum_{k=0}^n c_k x^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$N_1(Q) = \max_{0 \leq k \leq n} |c_k| \quad \text{et} \quad N_2(Q) = \sup_{x \in [0, \delta]} |Q(x)|.$$

Montrer qu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\mu N_2(Q) \leq N_1(Q) \leq \lambda N_2(Q), \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

2. Pour tout $x \geq a$ et $\delta \geq u > 0$ montrer que (utiliser Taylor-Lagrange)

$$\left| f(x) + f'(x)u + \dots + f^{(n)}(x) \frac{u^n}{n!} \right| \leq \|f\|_\infty + \frac{\delta^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_\infty := M,$$

où $\|g\|_\infty := \sup_{x \geq a} |g(x)|$.

En déduire que pour tout $x \geq a$ (en notant $P_x(X) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} X^k \in \mathbb{R}_n[X]$) on a :

$$N_2(P_x) \leq M.$$

3. En déduire la version faible des inégalités de Kolmogorov

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n\} : \|f^{(k)}\|_\infty \leq k! \lambda M.$$

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.