Normes, normes équivalentes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Normes, normes équivalentes***

[1]

Pour $f \in \mathscr{E} := \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \ : \ f(0) = f'(0) = 0\}$ *on pose*

$$\|f\| = \|f + 2f' + f''\|_\infty.$$

1. *Montrer que* $\|\cdot\|$ *est sur* $\mathscr{E}$*, une norme plus fine que la norme uniforme* $\|\cdot\|_\infty$*. Déterminer la plus petite constante* $a > 0$ *vérifiant* $\|f\|_\infty \leq a \cdot \|f\|$ *sur* $\mathscr{E}$*.*
2. *Les normes* $\|\cdot\|$ *et* $\|\cdot\|_\infty$ *sont-elles équivalentes sur* $\mathscr{E}$ *?*

Solution :

1. *Soit* $f \in \mathscr{E}$ *vérifiant* $\|f\| = 0$*. Comme donc* $f+2f'+f'' = 0$*,* f *est de la forme* $t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-t}$ *et les conditions* $f(0) = f'(0) = 0$ *impliquent* $\lambda = \mu = 0$ *;* f *est donc identiquement nulle. Les autres axiomes des normes sont faciles à vérifier.*

   Soit $f \in \mathscr{E}$*. Posons* $g = f + 2f' + f''$*, on a donc* $\|g\|_\infty = \|f\|$*. Nous allons exprimer* f *en fonction de* g*. En remarquant que* f *est une solution de l'équation différentielle* $y''+2y'+y = g$*. Les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme* $e^{-t}(\alpha t + \beta)$ *; la méthode de variation des contantes nous conduit alors à chercher deux fonctions* α *et* β *telles que*

$$\begin{cases} te^{-t}\alpha'(t) + e^{-t}\beta'(t) & = 0 \\ (1-t)e^{-t}\alpha'(t) - e^{-t}\beta'(t) & = g(t) \end{cases}$$

   soit

$$\begin{cases} t\alpha'(t) + \beta'(t) & = 0 \\ (1-t)\alpha'(t) - \beta'(t) & = e^t g(t) \end{cases}$$

   qui donne

$$\alpha'(t) = e^t g(t) \quad \text{et} \quad \beta'(t) = -te^t g(t),$$

   soit

$$\alpha(t) = \int_0^t e^x g(x)dx + \lambda, \quad \beta(t) = -\int_0^t xe^x g(x)dx + \mu.$$

Comme $f(t) = e^{-t}(\alpha(t)t + \beta(t))$ *les conditions initiales* $f(0) = f'(0) = 0$ *assurent* $\lambda = \mu = 0$ *et finalement*

$$f(t) = e^{-t} \int_0^t (t - x)e^x g(x)dx.$$

On en déduit

$$|f(t)| \leq \|g\|_\infty e^{-t} \int_0^t (t-x)e^x dx = \|f\|(1-e^{-t}(1+t) \leq \|f\| \sup_{[0,1]}(1-e^{-t}(1+t) = \|f\| \left(1 - \frac{2}{e}\right).$$

La constante $1 - 2e^{-1}$ *est bien la meilleure possible puisque pour* $f(t) = (1 - e^{-t}(1 + t)$ *qui appartient bien à* $\mathscr{E}$ *on a* $\|f\| = 1$ *et* $\|f\|_\infty = 1 - 2e^{-1}$.

2. *Les deux normes ne sont toutefois pas équivalentes puisque (par exemple) la suite* $(f_n)_{n\geq 2}$ *dans* $\mathscr{E}$ *définie par* $f_n(t) = t^n/n$ *tends vers zéro pour la norme* $\| \cdot \|_\infty$ *mais pas pour la norme* $\| \cdot \|$ *car* $\|f_n\|_\infty = 1/n$ *alors que* $\|f_n\| = n^{-1} + 1 + n$.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.