# Complémentaire d'un hyperplan dans un espace vectoriel normé

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Complémentaire d'un hyperplan dans un espace vectoriel normé***

*[1]-2006.*

*Soit $E$ un espace vectoriel normé réel et $H$ un hyperplan. Montrer que $E \setminus H$ est connexe par arcs si, et seulement si $H$ est fermé.*

***Solution :*** *Il est utile de se souvenir qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non identiquement nulle sur $E$ ; il faut aussi ne pas oublier (voir exercice ? ? ?) qu'un hyperplan $H = \ker(\varphi)$ est fermé si, et seulement si, la forme linéaire $\varphi$ est continue. Rappelons aussi (voir l'exercice ? ?) que dans un espace vectoriel normé de dimension* ***infinie****, il existe* ***toujours*** *des formes linéaires discontinues.*

*Supposons $H$ fermé et montrons que $E \setminus H$ n'est pas connexe. Soit $\varphi$ une forme linéaire sur $E$ de noyau $H$, posons $H^+ = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$, $H^- = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_-^\star)$. Comme $\varphi$ n'est pas identiquement nulle $H^+$ et $H^-$ sont non vides, montrons que $H^+$ est ouvert[1]. Soit $x \in H^+$ et $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset E \setminus H$ (une telle boule existe car $H$ est fermé donc $E \setminus H$ est ouvert) ; la boule $B(x,r)$ est convexe et $\varphi$ est linéaire donc $\varphi(B(x,r))$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$ ne contenant pas l'origine mais rencontrant $\mathbb{R}_+^\star$ c'est donc un intervalle de $\mathbb{R}_+^\star$. Ainsi $\varphi(B(x,r)) \subset \mathbb{R}_+^\star$ et donc $B(x,r) \subset H^+$ qui est bien ouvert. De la même manière $H^-$ est fermé. On dispose ainsi d'une partition de $E \setminus H$ en deux ouverts non vides $H^+$ et $H^-$ : $E \setminus H$ est pas connexe et à fortiori n'est pas connexe par arcs.*

*Pour la réciproque, le lemme suivant est crutial.*

**Lemme :** Soit $C$ une partie convexe de $E$ et $D$ une partie de $E$ telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Alors $D$ est connexe par arcs.

***Preuve du lemme :*** *Il s'agit de montrer que pour tous $c, d \in D$ il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to D$ tel que $\gamma(0) = c$ et $\gamma(1) = d$.*

*Supposons pour commencer que $c \in C$ et $d \in D \subset \overline{C}$, alors il existe une suite $(x_n)_n$ dans $C$ de limite $d$ et de premier terme $x_1 = c$. Considérons alors le chemin continu $\gamma : [0,1] \to D$ défini comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ : $\gamma(1-1/n) = x_n$, la restriction de $\gamma$ à $[1-1/n, 1-1/(n+1)]$ est affine, et enfin $\gamma(1) = d$. Comme $C$ est convexe et inclu dans $D$ il est clair que $\gamma([0,1[) \subset C \subset D$ et $\gamma(1) = d$ implique $\gamma([0,1]) \subset D$. La restriction de $\gamma$ à chaque segment de $[0,1[$ est affine par* *morceaux : $\gamma$ est donc continue sur $[0,1[$. Il reste donc à vérifier que $\gamma$ est bien continue au point 1. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ et $N \geq 1$ tel que $n \geq N$ implique $x_n \in B(d,\varepsilon)$. Pour $t \in ]1-1/N, 1[$ il existe $n \geq N$ tel que $t \in [1-1/n, 1-1/(n+1)]$, soit $\gamma(t) \in [x_n, x_{n+1}]$, comme $x_n$ et $x_{n+1}$ sont dans la boule convexe $B(d,\varepsilon)$ il en est de même de $\gamma(t)$ i.e. $\|\gamma(t) - d\| = \|\gamma(t) - \gamma(1)\| < \varepsilon$. $\gamma$ est bien continue au point 1.*

*Pour le cas général $c, d \in D$, et on choisit un point $e$ dans $C$, vu ce qui précède il existe dans $D$ deux chemins continus sur $[0,1]$, l'un reliant $e$ à $c$ et l'autre $e$ à $d$ et c'est alors une procédure classique pour en construire un reliant $c$ à $d$. C.Q.F.D.* ■

*Montrons maintenant que si $H$ n'est pas fermé, alors $E \setminus H$ est connexe par arcs. $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de $E$ contenant strictement $H$, donc $\overline{H} = E$. Soit $a \in E \setminus H$, l'application $x \mapsto x + a$ étant un homéomorphisme $\overline{a+H} = a + \overline{H} = E$. Ainsi $a + H \subset E \setminus H \subset \overline{a+H}$. $a + H$ étant convexe, le lemme précédent assure que $E \setminus H$ est connexe par arcs.*

***Remarque :** Par exemple, si on considére l'espace $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et l'hyperplan $F = \{f \in E \ : \ f(0) = 0\}$, alors $E/H = \{f \in E \ : \ f(0) \neq 0\}$ est connexe par arcs dans $(E, \|\cdot\|_1)$ mais ne l'est pas dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.*

# Références


[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.