Deux sous-espaces fermés dont la somme ne l'est pas

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***Deux sous-espaces fermés dont la somme ne l'est pas***

Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert séparable. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_n = e_{2n} \quad \text{et} \quad y_n = \sqrt{1-4^{-n}}e_{2n} + 2^{-n}e_{2n+1}.$$

On désigne par X le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite de vecteurs $(x_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $X = \overline{\text{vect}(x_n,\ n \geq 0)}$) et par Y celui engendré par la suite $(y_n)_{n\geq 0}$.

1. *Montrer que $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ sont des bases hilbertiennes de X et Y respectivement. Montrer que $X \cap Y = \{0_H\}$ puis que $\overline{X+Y} = H$.*
2. *Montrer que la série $\sum_n 2^{-n}e_{2n+1}$ converge dans H mais que sa somme $v = \sum_n 2^{-n}e_{2n+1}$ n'appartient pas à $X+Y$. En déduire que $X+Y$ n'est pas fermé dans H.*

Solution :

1. *Extraite de la base orthonormée $(e_n)_{n\geq 0}$ la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée. Pour la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ on a : $\|y_n\|^2 = (1-4^{-n}) + (2^{-n})^2 = 1$; et pour $n \neq m$ les vecteurs $e_{2n},\ e_{2n+1}$ sont orthogonaux aux vecteurs $e_{2m},\ e_{2m+1}$ car les ensembles $\{2n, 2n+1\}$ et $\{2m, 2m+1\}$ sont disjoints : la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ est aussi orthonormée. Ce sont des bases hilbertiennes des espaces X et Y respectivement, car dans un esapce de Hilbert, toute suite orthonormée est une base hilbertienne de l'espace vectoriel fermé qu'elle engendre.*

   Soit $x = \sum_{n\geq 0} c_k e_k \in H$. Si $x \in X \cap Y$, de la question précédente nous avons aussi les developpements $x = \sum_{n\geq 0} a_n x_n = \sum_{n\geq 0} b_n y_n$. Calculons c_{2k+1} :

   $$c_{2k+1} = \langle x, e_{2k+1}\rangle = \langle \sum_{n\geq 0} a_n x_n, e_{2k+1}\rangle = \sum_{n\geq 0} a_n \langle x_n, e_{2k+1}\rangle = 0,$$

   puisque $\langle x_n, e_{2k+1}\rangle = \langle e_{2n}, e_{2k+1}\rangle = 0$. Mais on a aussi

   $$c_{2k+1} = \langle x, e_{2k+1}\rangle = \langle \sum_{n\geq 0} b_n y_n, e_{2k+1}\rangle = \sum_{n\geq 0} b_n \langle y_n, e_{2k+1}\rangle = \langle y_k, e_{2k+1}\rangle = 2^{-k}b_k$$

   ce qui montre que $b_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}$ et donc $x = 0_H$.

Pour vérifier la densité de $X+Y$ dans H il est suffisant de montrer que $X+Y$ contient la base $(e_n)_n$; c'est bien le cas puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ $e_{2n} = x_n \in X+Y$ et $e_{2n+1} = 2^n(y_n - \sqrt{1-4^{-n}}) \in X+Y$.

2. *La série $\sum_n 2^{-n} e_{2n+1}$ est normalement convergente, donc convergente dans l'espace complet H. Si le vecteur $v = \sum_n 2^{-n} e_{2n+1}$ était dans $X+Y$ on aurait $v = x + y = \sum_{n\geq 0} a_n x_n + \sum_{n\geq 0} b_n y_n$. En particulier pour $k \geq 0$*

$$2^{-k} = \langle v, e_{2k+1} \rangle = 2^{-k} b_k$$

ce qui impose $b_k = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, mais ceci est impossible car la série définissant y serait divergente.

Ainsi $X+Y$ est strictement inclu dans H, comme $\overline{X+Y} = H$, $X+Y$ ne peut être fermé dans H.

Références