La somme de deux sous espaces fermés est-elle fermée ?

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ ***La somme de deux sous espaces fermés est-elle fermée ?***

[?]

Soient E un espace vectoriel normé (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), F, G deux sous espaces de E. On suppose F fermé et G de dimension finie, montrer que $F + G := \{\ x + y,\ x \in F,\ G \in G\}$ est fermé.

Solution : *Aprés une récurrence élémentaire, on peut se ramener au cas où G est une droite vectorielle $\mathbb{K}g$ de E. Si $g \in F$ alors $F+G = F$ qui est fermé et il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $g \notin F$, soit $x \in \overline{F+G}$, et montrons que $x \in F + G$.*

Il existe une suite $(x_n)_n$ dans $F + G$ qui converge vers x dans E, les vecteurs x_n sont donc de la forme $x_n = f_n + \lambda_n g$ où $f_n \in F$ et $\lambda_n \in \mathbb{K}$. Remarquons que si la suite $(|\lambda_n|)_n$ ne tends pas vers $+\infty$ alors l'exercice est résolu : en effet on peut alors on peut alors extraire de la suite $(\lambda_n)_n$ une suite bornée, puis, via Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}$, une sous-suite $(\lambda_{\varphi(n)})_n$ convergente vers $\lambda \in \mathbb{K}$. Dans ce cas, la relation $f_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - \lambda_{\varphi(n)} g$ montre que $(f_{\varphi(n)})_n$ converge vers $f = x - \lambda g$ qui appartient à F puisque F est fermé par hypothèse et finalement $x = f + \lambda g \in F + G$.

Il reste à vérifier que $(|\lambda_n|)_n$ ne tends pas vers $+\infty$. Si tel était le cas, les relations (valables pour n assez grand)

$$g = \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{f_n}{\lambda_n}$$

impliqueraient que $F \ni f_n/\lambda_n \to -g$ soit, $g \in \overline{F} = F$ ce qui est exclu puisque $g \notin F$.

L'hypothèse « G de dimension finie » est essentielle : en général, la somme de deux sous-espaces fermés n'est pas fermée même dans un espace de Hilbert comme on peut le vérifier dans l'exercice ci-dessous.

Références

[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.