# Une famille totale dans $l^2(\mathbb{N})$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

11 mai 2023

***Exercice 0.1*** ★ ***Une famille totale dans*** $l^2(\mathbb{N})$

*[1]*

*L'espace $l^2(\mathbb{N})$ des suite réelles de carré sàmmable est muni du produit scalaire usuel. On fixe $\alpha \in ]-1,1[$ et on pose pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$ : $U_i = (\alpha^{ni})_{n\geq 0}$.*

1. *Montrer que $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ est une famille libre de $l^2(\mathbb{N})$.*
2. *Calculer l'orthogonal dans $l^2(\mathbb{N})$ de $F := \text{vect}\{U_i,\ i \in \mathbb{N}^\star\}$.*
3. *Que peut-on en déduire ?*

***Solution :***

1. *Dire que la famille $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ n'est pas libre dans $l^2(\mathbb{N})$ c'est dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^\star,\ \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{R}$ non tous nuls, tels que*

$$\lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_N U_N = 0_{l^2(\mathbb{N})}$$

*soit*

$$\lambda_1(\alpha^k)_k + \lambda_2(\alpha^{2k})_k + \cdots + \lambda_N(\alpha^{Nk})_k = (\lambda_1\alpha^k + \lambda_2\alpha^{2k} + \cdots + \lambda_N\alpha^{Nk})_k = 0_{l^2(\mathbb{N})},$$

*ou encore, si $P(X) = \lambda_1 X + \lambda_2 X^2 + \cdots + \lambda_N X^N \in \mathbb{R}[X]$*

$$P(\alpha^k) = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^\star.$$

*Comme $\alpha \in ]-1,1[$ le polynôme $P$ a trop de zéros pour ne pas être le polynôme nul donc*

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = 0$$

*et la famille $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ est bien libre dans $l^2(\mathbb{N})$.*

2. *Soit $X = (x_k)_k \in l^2(\mathbb{N})$.*

$$\begin{aligned}\left(X = (x_k)_k \in F^\perp\right) &\iff (\langle X, U_i\rangle = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^\star)\\ &\iff \left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k \alpha^{kj} = 0, \quad \forall\, i \in \mathbb{N}^\star\right).\end{aligned}$$

*Comme $X = (x_k)_k \in l^2(\mathbb{N})$, le rayon de convergence de la série entière $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^k$ est supérieur ou égal à 1 ; la formule établie au dessus assure alors que $f$ s'annule sur tous les points de la suite $(\alpha^k)_k$ convergente vers 0 : l'ensemble des zéros de $f$ dans le disque unité ouvert n'est donc pas isolé, classiquement (voir par exemple : [**?**] exercice 3.31, inutile d'invoquer les zéros isolés...) $f$ est identiquement nulle, i.e. $x_k = 0,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^\star$ i.e. $X = 0_{l^2(\mathbb{N})}$ et $F^\perp = \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}$.*

3. *$F^\perp = \{0_{l^2(\mathbb{N})}\}$ implique que $\overline{F} = l^2(\mathbb{N})$ (c'est une conséquence immédiate du théorème de projection orthogonale sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert car $F^\perp = (\overline{F})^\perp$) autrement dit, la famille $\{U_i\}$ est totale dans $l^2(\mathbb{N})$.*

## Références


[1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, http ://www.rms-math.com/.