

Dénombrement dans les groupes

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

11 août 2023

Exercice 0.1 ★ Dénombrement dans les groupes

[1]

Soient G un groupe fini, A, B deux parties de G telles que

$$\text{card}(A) + \text{card}(B) > \text{card}(G).$$

Montrer que $AB = G$ (où $AB = \{ab, a \in A, b \in B\}$).

Solution : Soit $g \in G$, il s'agit de montrer que g s'écrit sous la forme $g = ab$ où $a \in A, b \in B$.
Soit $A^{-1}g := \{a^{-1}g, a \in A\}$, l'application $A \ni a \mapsto a^{-1}g \in A^{-1}g$ étant bijective $\text{card}(A) = \text{card}(A^{-1}g)$ et par suite $\text{card}(A^{-1}g) + \text{card}(B) > \text{card}(G)$. Il en résulte immédiatement que $\text{card}(A^{-1}g) \cap \text{card}(B) \neq \emptyset$ i.e. il existe $a \in A$ tel que $a^{-1}g = b \in B$ soit $g = ab$.

Références

- [1] Revue de Mathématiques Supérieure (RMS). e.net et anciennement Vuibert, <http://www.rms-math.com/>.