10^{2006} divise $n!$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ 10^{2006} ***divise*** $n!$

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^\star$ tels que l'écriture décimale de $n!$ se termine par 2006 zéros exactement.

Solution : *Dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$, l'exposant du nombre premier p vaut (pourquoi ?)*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^i}\right]$$

qui est bien entendu une somme finie puisque $[n/p^i]=0$ pour $i>\log_p(n)$. Ainsi

$$n! = \prod_{p,\ p/n!} p^{\alpha_p} = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{\alpha_5}\dots$$

où

$$\alpha_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right], \quad \alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^i}\right].$$

Mais pour $n\geq 2$

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^i}\right] < \alpha_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{2^i}\right].$$

Par conséquent, pour que l'écriture décimale de $n!$ se termine par exactement 2006 zéros il est essentiel que $\alpha_5=2006$. Il faut donc déterminer les entiers n tels que $n! = 2^{\alpha_2}3^{\alpha_3}5^{2006}\dots$. Comme

$$\alpha_5 = 2006 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n}{5^i}\right] < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{n}{5^i} = \frac{n}{5}\sum_{i=0}^{\infty}5^{-i} = \frac{n}{4},$$

nous avons $n>4\times 2006=8024$. Avec un calcul facile l'exposant de 5 dans la décomposition de 8025! vaut

$$\alpha_5 = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{8025}{5^i}\right] = 1605+321+64+2 = 2004.$$

Il faut nous faut donc deux zéros supplémentaires, par conséquent, le plus petit entier n tel que $n!$ se termine par 2006 zéros est $n=8035$ et l'ensemble cherché est $8035, 8036, 8037, 8038, 8039$.

Références